Добрый(?) геометрический разнобой

1. На окружности ω с центром в точке O лежат точки A и B, на хорде AB выбрана точка X. Прямая, проходящая через X перпендикулярно прямой OX, пересекает касательные к ω, проведенные в точках A и B, в точках C и D. Докажите, что $CX = DX$.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены точки C_1 и A_1 соответственно так, что

$$AI^2 = AC_1 \cdot AC, \quad CI^2 = CA_1 \cdot CA.$$

Докажите, что точка I лежит на прямой A_1C_1.

3. В равнобедренном треугольнике $ABC(AB = BC)$ проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

4. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.

5. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Пусть P – точка пересечения диагоналей. Докажите, что середины сторон четырехугольника $ABCD$ и проекции точки P на стороны лежат на одной окружности.

6. В остроугольный треугольник ABC помещены две окружности, касающиеся сторон AC и BC, и сторон AB и BC соответственно, а также друг друга. Докажите, что сумма их радиусов больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

7. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD – в точке S. Пусть M и N — середины сторон BC и AD. Докажите, что описанная окружность треугольника MSN касается прямой PS.

8. Пусть F – проекция середины D основания AC равнобедренного треугольника $ABC(AB = BC)$ на медиану CE треугольника BCD. Докажите, что $\angle AFB = 90°$.