Квадратичный закон взаимности Гаусса

Пусть p и q — два простых нечетных числа. Докажите, что

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

1. Пусть p — нечетное простое число вида $3k+2$. Докажите, что если $3a^2+b^2$ делится на p, то a и b делится на p.

2. Докажите, что при любом натуральном a все простые делители a^2-5a+5 большие 5 имеют вид $5k \pm 1$.

3. Про натуральные числа a, b, p, где p — простое, известно, что $a^2+b^2=p$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p, если
(a) a — нечетное простое;
(b) a — нечетное.

4. Найдите наименьший простой делитель числа $12^{2^{15}}+1$.

5. Пусть $k = 2^{2^n}+1$ для некоторого натурального n. Докажите, что k является простым тогда и только тогда, когда k — делитель числа $3^{\frac{k-1}{2}}+1$.