

Разной с графами

1. В классе учатся 30 человек. Причем каждый дружит хотя бы с 15 другими. Докажите, что среди них можно выбрать четверых и посадить их за круглый стол так, что каждый сидит рядом со своими друзьями.
2. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.
3. В связном ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.
4. На тренинг по личностному росту пришло 30 человек. Оказалось, что любых пятерых можно посадить за круглый стол с условием, чтобы рядом сидящие были знакомы. Какое минимальное количество пар знакомых может присутствовать на тренинге?
5. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?
6. Даны $N > 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем однотонной, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.
7. В связном графе $n > 5$ вершин и $2n - 1$ ребро. Докажите, что в нём можно найти простой цикл, после уничтожения всех рёбер которого граф не потеряет связность.
8. У сломанного циркуля нельзя изменить расстояние между концами ножек. Пете удалось поставить циркуль так, что его концы оказались в двух узлах клетчатой бумаги. Петя шагает циркулем, поочередно оставляя одну ножку на бумаге, а другую перенося в новый узел. Может ли Петя вернуть циркуль в исходные точки так, чтобы ножки поменялись местами?