

Дискретная непрерывность

Важная задача. Несколько целых чисел выписали в ряд так, что любые два соседних числа отличаются не более, чем на единицу. Более того, первое число отрицательно, а последнее — положительно. Докажите, что среди этих чисел есть число 0.

- (а) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа?

(б) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
- На клетчатой доске 100×100 половина клеток белые, а половина — черные.

(а) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток.

(б) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две **равные** части с равным числом черных клеток.
- За круглым столом сидит четное количество гномов в колпаках с помпонами, причем, у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых количество помпонов на колпаках отличается не больше, чем на 1.
- В некоторых клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 27. Докажите, что в некотором квадрате 5×5 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 5.
- На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах, если

(а) известно, что король может дойти до одной ладьи (известно, какой) за 100 ходов.

(б) про местоположение короля ничего не известно.
- Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб со стороной 2, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.
- По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.