# Площадь

**1.** Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

**2.** Пусть $M$ и $N$ – середины противоположных сторон $BC$ и $AD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки $AM$ и $BN$ пересекаются в точке $P$, а отрезки $DM$ и $CN$ – в точке $Q$. Докажите, что сумма площадей треугольников $APB$ и $CQD$ равна площади четырехугольника $MPNQ$.

**3.** К двум непересекающимся окружностям $\omega_1$ и $\omega_2$ проведены три общие касательные – две внешние, $a$ и $b$, и одна внутренняя, $c$. Прямые $a, b$ и $c$ касаются окружности $\omega_1$ в точках $A_1, B_1$ и $C_1$ соответственно, а окружности $\omega_2$ – в точках $A_2, B_2$ и $C_2$ соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$.

**4.** На сторонах $AB, BC$ и $CA$ произвольного треугольника $ABC$ взяты точки $C_1, A_1$ и $B_1$ соответственно. Обозначим через $S_1, S_2$ и $S_3$ площади треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1$ и $CA_1B_1$ соответственно. Докажите, что

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{S_{ABC}}$$

**5.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $K$. На биссектрисе угла $AKD$ нашлась точка $P$ такая, что прямые $BP$ и $CP$ делят пополам отрезки $AC$ и $BD$ соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

**6.** Пусть $M$ – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании $BC$ выбрана такая точка $P$, что $\angle APM = \angle DPM$. Докажите, что расстояние от точки $C$ до прямой $AP$ равно расстоянию от точки $B$ до прямой $DP$.

**7.** На сторонах $BC$ и $DC$ параллелограмма $ABCD$ выбраны точки $D_1$ и $B_1$ так, что $BD_1 = DB_1$. Отрезки $BB_1$ и $DD_1$ пересекаются в точке $Q$. Докажите, что $AQ$ – биссектриса угла $BAD$.

**8.** **(a)** Через точку $X$, лежащую внутри параллелограмма, проведены прямые, параллельные его сторонам. Тогда два образовавшихся при этом параллелограмма с единственной общей вершиной $X$ равновелики тогда и только тогда, когда точка $X$ лежит на диагонали параллелограмма.

**(b)** Через точку $L$, взятую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам и пересекающие стороны $AB$ и $CD$ соответственно в точках $K$ и $G$, а стороны $BC$ и $AD$ соответственно в точках $F$ и $M$. Докажите, что прямые $BM, KD$ и $CL$ пересекаются в одной точке.

**(c)** **(Прямая Гаусса)** Прямая, не проходящая через вершины треугольника $ABC$, пересекает его стороны $BC, CA, AB$ соответственно в точках $A_1, B_1, C_1$, то середины отрезков $AA_1, BB_1, CC_1$ коллинеарны. [1]

[1] Сделайте гомотетию с центром в $A$ и коэффициентом 2. Что-то знакомое?