Функциональные уравнения

Обозначения: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$ — множества действительных, рациональных, натуральных чисел соответственно (плюсик внизу добавляет условие положительности, то есть $\mathbb{R}_+$ обозначает действительные положительные числа).

Во задачах листика надо найти всевозможные функции, с заданной областью определения и областью значений, удовлетворяющих условиям задачи.

1. Попробуйте что-нибудь подставить в функциональное уравнение.
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy;$$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f\Big(x + f(y)\Big) = x + y;$$
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

2. Надо составить систему линейных уравнений.
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$2f(x) + f(1 - x) = x^2;$$
(b) $f : \mathbb{R}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) + f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = x.$$

3. Попробуем сделать замену переменных, функции?
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,
$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy;$$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,
$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy).$$

4. Составьте рекурренту
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$$f\Big(f(n)\Big) + f(n) = 2n + 6.$$

5. Линейная функция?
(a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$,
$$f(x + y) = f(x) + f(y);$$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и f не является линейной функцией,
$$f(x + y) = f(x) + f(y);$$
Докажите, что график $f(x)$ всюду плотен на плоскости.
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и f непрерывна во всех точках,
$$f(x + y) = f(x) + f(y);$$
Докажите, что $f(x)$ — линейная функция.