# Инверсия

1. **(a)** Пусть при инверсии с центром $O$ точка $A$ переходит в $A'$ , а точка $B$ переходит в $B'$ . Докажите, что треугольники $OAB$ и $OB'A'$ подобны.

   **(b)** Докажите, что при инверсии с центром $O$ прямая $\ell$, не проходящая через $O$, переходит в окружность, проходящую через $O$, а окружность, проходящая через $O$, переходит в прямую, не проходящую через $O$.

   **(c)** Докажите, что при инверсии с центром $O$ окружность, не проходящая через $O$, переходит в окружность, не проходящую через $O$.

**Определение.** Обобщенной окружностью будем называть окружность или прямую (с бесконечно удаленной точкой).

Пусть две обобщенные окружности пересекаются в точке $X$. Тогда будем считать, что угол между ними равен углу между касательными к ним в точке $X$.

2. **(a)** Докажите, что инверсия сохраняет касание обобщенных окружностей.
   **(b)** Докажите, что угол между обобщенными окружностями сохраняется.

3. Пусть при инверсии с центром $O$ точка $A$ переходит в $A'$ , а точка $B$ переходит в $B'$ . Докажите, что $A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} AB$.

4. Точки $A$ и $B$ лежат на окружности $\omega$. Касательные к окружности, проходящие через точки $A$ и $B$, пересекаются в точке $P$. Докажите, что $P$ является образом середины хорды $AB$ при инверсии относительно $\omega$.

5. Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?

6. Через точку $A$ к окружности $\omega$ с центром $O$ проведены касательные $AX$ и $AY$, а также секущая, пересекающая окружность в точках $Z$ и $T$. Докажите, что точки $Z, T, O$ и середина $XY$ лежат на одной окружности.

7. Окружности $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$, таковы, что $\omega_2$ и $\omega_4$ касаются каждой из окружностей $\omega_1$ и $\omega_3$. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности или прямой.

8. Пусть $p$ — полупериметр треугольника $ABC$. Точки $E$ и $F$ на прямой $BC$ таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника $AEF$ касается вневписанной окружности треугольника $ABC$ со стороны $BC$.

9. Точка $P$ внутри треугольника $ABC$ такова, что $\angle BPA - \angle C = \angle BPC - \angle A$. Докажите, что биссектрисы углов $BAP$ и $BCP$ пересекаются на $BP$.

10. Ортоцентр $H$ треугольника $ABC$ лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами $A$, $B$ и $C$, проходящие через точку $H$, имеют общую касательную.