[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс]
[2019–2020]   группа: 10-3   *28 октября 2019 г.*
Попов Л., Соколов А.

Числа Каталана

Определение. Обозначим через c_n количество способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, чтобы запись была корректна (то есть, среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся). Число c_0 полагается равным 1. Число c_n называется n-ым *числом Каталана.*

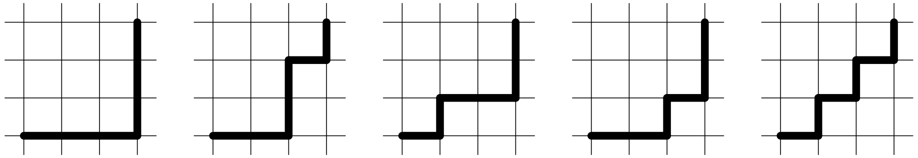
`((()))    (())()    ()(())    (()())    ()()()`

1. Докажите, что числа Каталана при всех $n \geqslant 0$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \dots + c_nc_0.$$

В следующих задачах приведен ряд множеств и требуется доказать, что количество элементов в них равно c_n. Для этого есть два основных способа — построить явную биекцию или проверить рекуррентное соотношение. В некоторых задачах полезно сделать и то и то.

2. **(a)** Докажите, что количество путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой $y = x$, равно c_n.



(b) Докажите, что количество таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, причем числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают, равно c_n.

1	2	3
4	5	6

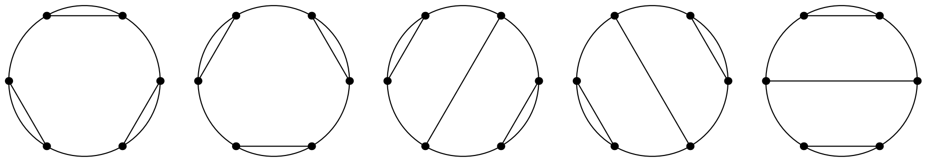
1	2	4
3	5	6

1	3	4
2	5	6

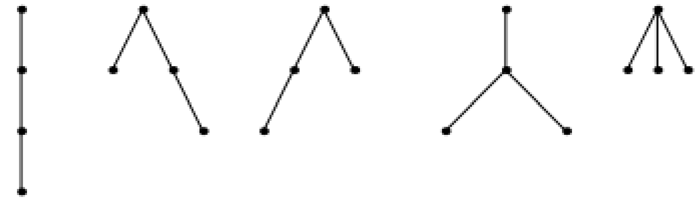
1	2	5
3	4	6

1	3	5
2	4	6

(c) Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда) равно c_n.



(d) Докажите, что количество упорядоченных корневых деревьев (то есть деревьев, у которых задан корень и для каждой вершины задан порядок ее потомков) с $n+1$ вершинами равно c_n.



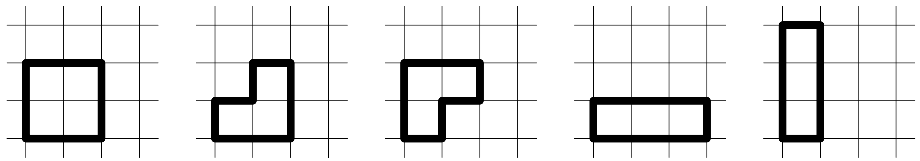
Следующая наша цель — найти явную формулу для чисел Каталана.

3. **(Принцип отражений)** **(a)** Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-2)$.

(b) При помощи предыдущего пункта докажите, что

$$c_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}.$$

4. Докажите, что количество «*параллеломино*» (пара путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$ равно c_n.



5. Докажите, что количество наборов из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе неважен) равно c_n.

`0 0 0    0 1 3    0 2 2    1 1 2    2 3 3`