

## Принцип Дирихле в геометрии

1. Внутри правильного треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми меньше, чем  $\frac{1}{2}$ .
2. На плоскости даны треугольник  $ABC$  и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника  $ABC$ . Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.
3. В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то 3 из них можно накрыть кругом радиуса  $\frac{1}{7}$ .
4. Каждый день Фрекен Бок выпекает квадратный торт размером  $3 \times 3$ . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных кусков размером  $1 \times 1$  со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки  $3 \times 3$ ). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
5. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно целиком накрыть круг радиуса 2?
6. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в  $p$  цветов. Докажите, что существуют  $m$  горизонтальных и  $n$  вертикальных прямых, на пересечении которых лежат точки одного цвета.
7. Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрел форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?
8. Докажите, что плоскость нельзя покрыть 100 параболой со внутренней частью. (Линия называется параболой, если существует прямоугольная система координат  $(x, y)$ , в которой эта линия представляется как  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a > 0$ )
9. На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно, граничную). Докажите, что найдётся точка, принадлежащая не менее, чем 15 кругам.