Комбинаторный разнобой

1. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 30 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — отважным, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?

2. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала). Сколько раз она выписала произвольное число n?

3. Внутри окружности радиуса n расположено $4n$ отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную данной прямой ℓ и пересекающую по крайней мере два данных отрезка.

4. Дана последовательность, состоящая из n различных чисел. Про нее известно, что ее любая возрастающая подпоследовательность имеет длину не больше k, а любая убывающая подпоследовательность имеет длину не больше l. Докажите, что $n \leqslant kl$.

5. За столом сидят 2019 джедаев. Любознательный Энакин хочет узнать, как их зовут (у всех джедаев разные имена). Он может показать на несколько джедаев пальцем и попросить магистра Йоду перечислить все их имена. К сожалению, порядок, в котором Йода перечисляет имена, может быть произвольным. Какое наименьшее количество раз Энакину придется отвлечь магистра Йоду от медитации?

6. В лагерь приехали m мальчиков и d девочек. Каждая девочка знакома не более, чем с 10 мальчиками, а каждый мальчик — не менее, чем с одной девочкой. Оказалось, что у каждого мальчика больше знакомых девочек, чем у любой знакомой с ним девочки — знакомых мальчиков. Докажите, что $d \leqslant 1.1m$.

7. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических – из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.