Вспоминаем комплексные числа

Определение. *Комплексным* числом называется формальная запись вида $a+bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2=-1$, $a,b\in\mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0+0i$.

1. Пусть $x,y\in\mathbb{C}$. Докажите, что
(a) $x+y, x-y, xy\in\mathbb{C}$;
(b) если $y\neq 0$, то $\frac{x}{y}\in\mathbb{C}$.

2. Упростите выражение: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

3. Решите уравнение
(a) $x^2-(2i+2)x+(2i-1)=0$;
(b) $x^3-1=0$;
в комплексных числах.

Определение. Числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными*. Сопряженное к числу z обозначается $\overline{z}$.

Осознайте свойства сопряжения: $\overline{z}+\overline{t}=\overline{z+t}$; $\overline{zt}=\overline{z}\overline{t}$; $\overline{\overline{z}}=z$.

4. **(a)** Пусть x — корень квадратного трехчлена с рациональными коэффициентами. Докажите, что $\overline{x}$ также является корнем этого уравнения.
(b) Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $f(x)=0$, то $f(\overline{x})=0$.

Определение. Модуль комплексного числа $a+bi$ равен $\sqrt{a^2+b^2}$.

Осознайте, что: $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

5. **(Неравенство треугольника)** Докажите, что

$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|.$$

6. Про три комплексных числа известно, что $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0$ и $|z_1+z_2+z_3|=0$. Докажите, что точки z_1,z_2,z_3 образуют равносторонний треугольник на комплексной плоскости.

7. Про комплексные числа x,y,z известно, что $|x|=|y|=|z|=1$. Какие значения может принимать выражение $\left|\frac{x+y+z}{xy+yz+xz}\right|$?

Основная теорема алгебры. Любой многочлен (от одной переменной) ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один комплексный корень.

Следствие из основной теоремы алгебры. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в нём ровно n комплексных корней, с учётом их кратности.

8. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами существует набор многочленов с вещественными коэффициентами $Q_i(x)$, $\deg Q_i(x)\leqslant 2$ такой, что $P(x)=Q_1(x)Q_2(x)\cdot\ldots\cdot Q_n(x)$.

Определение. Каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, причем r определяется единственным образом, а φ — с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется *модулем* (и обозначается $|z|$), φ — *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

Упр. Представьте в тригонометрической форме числа $2, 1+i, 1-\sqrt{3}i$.

9. **(a)** Докажите, что $|zt|=|z|\cdot|t|$ для любых $z,t\in\mathbb{C}$.
(b) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

10. **(a)** Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
(b) **(Формула Муавра)** Докажите, что

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

11. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 7\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

12. Вычислите
(a) $\sqrt{1+i}$; **(b)** $(1+\sqrt{3}i)^{2019}$; **(c)** $1+(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{146}$.

13. Комплексные корни уравнения $x^n-1=0$ называются корнями n-ой степени из единицы.
(a) Представьте их в тригонометрической форме.
(b) Найдите сумму этих чисел.
(c) Найдите их произведение.
(d) Найдите их сумму квадратов.

14. **(a)** Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+i)^{2019}+(x-i)^{2019}=0.$$

(b) Найдите все его комплексные корни.

15. Упростите выражение:

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha.$$