Геометрический разнобой

1. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC, восстановленные в точке H, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.

2. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая ℓ, лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB, продолжения стороны BC за точку B и прямой ℓ в точке P. Окружность ω_C касается отрезка AC, продолжения стороны BC за точку C и прямой ℓ в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой ℓ.

3. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle ABC = \angle ACD$ и $\angle ADC = \angle ACB$. Точки X и Y — проекции точки A на BC и CD. Докажите, что ортоцентр треугольника AXY лежит на прямой BD.

4. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Пусть AA_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1, лежит на стороне AC.

5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Некоторая окружность проходит через точки A и O и вторично пересекает прямые AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника B_1C_1O лежит на прямой BC.

6. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S. Докажите, что $\angle BAM = \angle MSN$.

7. К двум непересекающимся окружностям ω_A и ω_B проведена общая касательная AB, причём $A \in \omega_A$, $B \in \omega_B$. Окружность, построенная на AB как на диаметре, повторно пересекает ω_A в точке A_1, ω_B в точке B_1. Докажите, прямые AB_1 и A_1B пересекаются на линии центров ω_A и ω_B.

8. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный прямой AC. Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC.