Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Определение. Элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Основная теорема о симметрических многочленах. Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

1. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен $q = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
(a) Для любого одночлена $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что старший член многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \cdots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q. Причем числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ определены этим условием однозначно.
(b) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

2. Выразите через основные симметрические многочлены
(a) $x^2 + y^2 + z^2$;
(b) $x^3 + y^3 + z^3$;
(c) $x^4 + y^4 + z^4$.

3. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа
(a) $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$;
(b) $y_1 = x_2 x_3$, $y_2 = x_1 x_3$, $y_3 = x_1 x_2$.

4. Есть многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен от его (комплексных) корней есть рациональное число.

5. Многочлен $x^{2019} + y^{2019}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(xy, x + y)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

6. Пусть α — корень многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами, β — корень многочлена $g(x)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что найдется многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является
(a) $\alpha + \beta$; **(b)** $\alpha\beta$.

7. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \cdots \pm \sqrt{2019}$ является целым числом.