Многочлены и не только

1. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

2. На доске записаны 5 различных чисел. Профессор Одд вычислил всевозможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Аналогично профессор Ивен вычислил всевозможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве (по 2, по 4), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке профессора Одд на 1 больше, чем сумма на листке профессора Ивен. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

3. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

4. Многочлен $x^3 + px^3 + qx + r$ имеет на интервале $(0, 2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

5. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2019$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2019) > \frac{1}{64}$.

6. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

7. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2 + Q^2 = R^2$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

8. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant \frac{1}{4}$.