

Гомотетия

1. Пусть в окружности ω проведена хорда AB , и ещё одна окружность касается ω в точке C и отрезка AB в точке D . Тогда прямая CD проходит через середину дуги AB , не содержащей точки C .
2. На плоскости зафиксирована дуга AB . Случайная окружность ω касается дуги AB внешним образом в точке X и касается прямой AB в точке Y . Докажите, что все прямые XY , построенные таким образом, проходят через фиксированную точку.
3. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D , что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A , тоже равны.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 , а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ; получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.
5. Через середину M стороны BC неравнобедренного треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC , точка касания обозначена через Y . Докажите, что прямая AU проходит через точку касания вневписанной окружности с отрезком BC .
6. (а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр Q вневписанной окружности, касающейся этой стороны, проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке T . Докажите, что отрезок AT равен радиусу этой вневписанной окружности.
(б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке W , M — точка касания вневписанной окружности со стороной BC , Z — точка пересечения прямой WM с высотой AH . Докажите, что отрезок HZ равен радиусу этой вневписанной окружности.
7. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I . Лучи AB, DC пересекаются в точке X . Вписанная окружность треугольника XBC касается отрезка BC в точке P ; вневписанная окружность треугольника XAD касается отрезка AD в точке Q . Оказалось, что прямая PQ проходит через X . Докажите, что точка I лежит на прямой, соединяющей середины отрезков BC и AD .
8. Пусть M и P — точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC , MN — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, N и P лежат на одной прямой.
9. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC , проходящие через M . Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC , касаются некоторой фиксированной окружности.