Максимум на конце отрезка

1. Пусть a – положительное число. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{k=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)\dots(a-a_{k-1})a_k(a-a_{k+1})\dots(a-a_n)$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ принадлежат отрезку $[0, a]$.

2. Пусть $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$. Докажите, что

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d \geqslant 1$$

3. Найдите максимальное значение суммы

$$S_n = a_1(1-a_2)+a_2(1-a_3)+\ldots+a_n(1-a_1)$$

где $\frac{1}{2} \leqslant a_1, a_2, \dots, a_n \leqslant 1$.

4. Докажите, что площадь треугольника, лежащего внутри единичного квадрата, не превосходит $1/2$.

5. Пусть $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n \leqslant 1$. Докажите,что

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1) \leqslant [\frac{n}{2}]$$

6. Пусть действительные числа a, v, c лежат на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что

$$3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-2xyz(x+y+z) \leqslant 3$$

7. Дано дерево G, в вершинах которого расставили неотрицательные числа с суммой 1, после чего для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах и сложили полученные числа для всех ребер. Найдите максимум рассмотренной суммы.

8. Докажите, что для любых чисел a, b, c из отрезка $[0, 1]$ выполнено неравенство:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1$$

9. Докажите, что если $1 \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n \leqslant 2$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2 \leqslant n^3$$