Серия 32. Неравенство Караматы

Напомним пару определений.

Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, определённая на конечном или бесконечном интервале (a,b), называется *выпуклой вниз*, если любая хорда её графика лежит выше самого графика. Алгебраически это условие записывается неравенством $\lambda f(x) + \mu f(y) \geqslant f(\lambda x + \mu y)$ при всех $x, y \in (a,b)$, $\lambda, \mu \in [0,1]$, $\lambda + \mu = 1$.

Будем говорить, что набор $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ вещественных чисел *мажорирует* набор $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ (оба набора состоят из n чисел), если выполнена система из неравенств и одного равенства (запись $x_i \succ y_i$):

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant y_1; \\ x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2; \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant y_1 + y_2 + y_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + \ldots + x_{n-1} \geqslant y_1 + \ldots + y_{n-1}; \\ x_1 + \ldots + x_n = b_1 + \ldots + y_n. \end{gathered}$$

Неравенство Караматы. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция, определённая на отрезке $[a,b]$ числовой прямой, и два невозрастающих набора x_i и y_i по n чисел из этого отрезка таковы, что $x_i \succ y_i$. Тогда выполнено

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

Идея доказательства. Если f — выпуклая вниз функция, что при сближении точек x_i и x_j с фиксированной суммой значение $f(x_i) + f(x_j)$ падает. Для доказательства неравенства достаточно убедиться, что сумма при условии мажорирования один набор можно перевести в другой за несколько операций сближения двух точек.

1. Докажите неравенство Караматы.

0. Для положительных чисел a, b, c. Докажите неравенство:

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geqslant \sqrt{\frac{ab}{c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{a^2}} + \sqrt{\frac{ca}{b^2}}.$$

Решение. Заменим переменные $a = e^x$, $b = e^y$, $c = e^z$. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Эта функция выпукла вниз на всей числовой прямой. Исходное неравенство может быть записано в виде

$$f(x+y-2z) + f(y+z-2x) + f(z+x-2y) \geqslant f(\frac{1}{2}(x+y-2z)) + f(\frac{1}{2}(y+z-2x)) + f(\frac{1}{2}(z+x-2y)).$$

Не умаляя общности считаем, что $x \leqslant y \leqslant z$. Заметим, что упорядоченный набор чисел $x+y-2z$, $z+x-2y$, $y+z-2x$ мажорирует набор $\frac{1}{2}(x+y-2z)$, $\frac{1}{2}(z+x-2y)$, $\frac{1}{2}(y+z-2x)$. Применяя неравенство Караматы к этому набору, получаем требуемое.

2. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

3. Для положительных a, b, d, d докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geqslant a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

4. Для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ докажите:

$$(1 + \frac{a_1^2}{a_2}) \cdot (1 + \frac{a_2^2}{a_3}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{a_n^2}{a_1}) \geqslant (1 + a_1) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n).$$

5. Существует ли бесконечная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такая, что для любого натурального n выполнены неравенства

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n^2,$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leqslant 2020?$$