Тренировочная олимпиада — 2

1. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ изначально лежали неразличимые на вид грузы: в вершине A — 1 г, в вершине B — 2 г., …, в вершине F — 6 г. Шутник Питирим поменял местами два шарика в **противоположных** вершинах. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах определить, какие именно шарики переставлены?

2. Дано натуральное n такое, что $1 < n < 2019$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ задан квадратный трёхчлен $P_i(x) = x^2 - 2019x + c_i$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — различные натуральные числа. Известно, что у квадратного трёхчлена

$$P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x)$$

есть целый корень. Докажите, что хотя бы одно из чисел c_i не меньше 2019.

3. В остроугольном треугольнике ABC отмечены центр O описанной окружности, середина M стороны AC, а также проведена высота AD. Описанная окружность треугольника AOM пересекает прямую DM в точках M и P, причём точка M лежит на отрезке DP. Докажите, что точки B, O, P лежат на одной прямой.

4. Даны натуральные числа n и k. В каждой клетке таблицы $n \times n$ стоит одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, k$. У каждой строки и каждого столбца имеется кнопка, при нажатии на которую все числа этой строки или этого столбца, меньшие k, увеличиваются на 1, а числа, равные k, заменяются нулями.

Известно, что исходную таблицу можно преобразовать в таблицу с нулям во всех клетках с помощью нескольких нажатий кнопок. Докажите, что это можно сделать, нажав на кнопки не более kn раз.

5. Среди чисел a, b, c, d из отрезка $[0, 1]$ нет двух, равных нулю. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+d^2} + \frac{1}{d^2+a^2} \geqslant \frac{8}{3+abcd}.$$