

Тренировочная олимпиада — 1

1. Гриша написал на доске пять целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Андрей стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, –5. Восстановите стёртое число.
2. На координатной прямой отмечено несколько точек (больше двух). Каждая точка, кроме двух крайних, находится ровно посередине между какими-то двумя отмеченными. Могут ли все отрезки, внутри которых нет отмеченных точек, иметь различные длины?
3. Все клетки доски 200×200 — белые. За одну операцию разрешается перекрасить в чёрный цвет любые три белых клетки, стоящие подряд по диагонали. Какое наибольшее количество клеток с помощью таких операций можно сделать чёрными?
4. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D . Точки O_B и O_C — центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Оказалось, что точки B, C, O_B, O_C лежат на одной окружности с центром в точке X . Докажите, что $\angle DAX = \angle DAN$, где точка N — ортоцентр треугольника ABC .
5. Гурман Гордон посетил несколько ресторанов. Придя домой, он начал сравнивать рестораны по двум категориям: вкус еды и качество обслуживания. Для каждой пары ресторанов Гордон отмечал, какой из них лучше в каждой из категорий. При этом любую пару ресторанов он сравнил либо в обеих категориях, либо в одной (нет двух ресторанов, которые бы он не смог сравнить ни по вкусу еды, ни по качеству обслуживания). Если Гордон отметил, что ресторан A лучше ресторана B и ресторан B лучше ресторана C в одной и той же категории, то он также отметил, что ресторан A лучше ресторана C в этой категории. Докажите, что найдётся ресторан, который, по мнению Гордона, будет лучше каждого из остальных ресторанов либо по вкусу еды, либо по качеству обслуживания (сравниваемая категория может оказаться разной для разных ресторанов).