Отборочная олимпиада, решения

1. Учитель написал на доске несколько натуральных чисел. Коля для каждой пары выписанных чисел посчитал их произведение и записал в тетрадь. Оказалось, что среди записанных Колей чисел нашлись оканчивающиеся на каждую из цифр от 0 до 9. Какое наименьшее количество чисел мог написать учитель на доске?

Решение.

Ответ: 6.

Среди выписанных учителем чисел обязательно будет хотя бы одно оканчивающееся на 5, так как это единственный способ получить 5 на конце в одном из произведений. Тогда произведения с данным числом могут оканчиваться только на 0 и 5.

Попарных произведений остальных выписанных учителем чисел должно быть хотя бы восемь (среди них должны быть произведения, оканчивающееся на 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9). Значит, остальных чисел как минимум пять, так как в противном случае их не больше четырёх, и они формируют не более 6 различных произведений. Вместе с числом, оканчивающимся на 5, получаем, что выписанных учителем чисел как минимум 6.

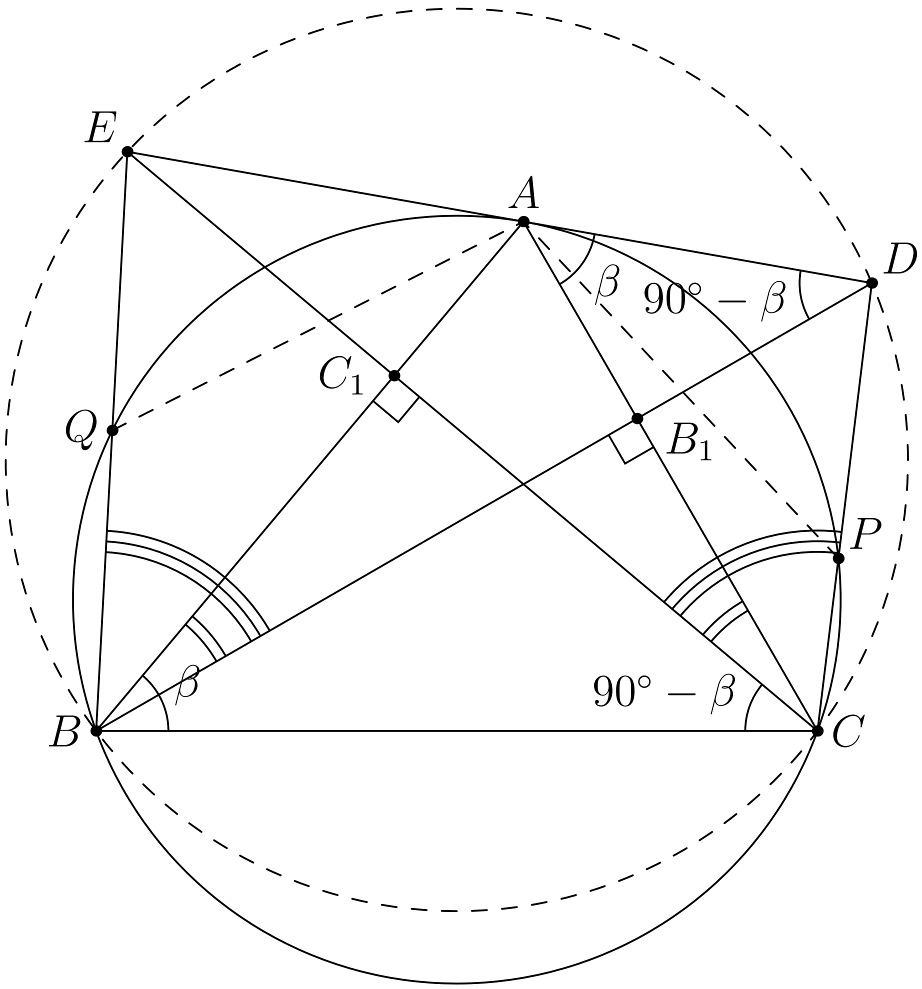
Для примера можно взять числа 1, 3, 5, 7, 9, 2, которые, как нетрудно убедиться, удовлетворяют условию.

2. В чемпионате участвовало $2n$ футбольных команд и был сыгран $2n-1$ тур. В каждом туре все команды разбивались на n пар и играли между собой. Под конец чемпионата оказалось, что каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. Кроме того, в каждом матче одна команда была хозяином, а другая — гостем.

Назовём команду *путешествующей*, если в любых двух подряд идущих турах она была и хозяином, и гостем. Докажите, что всего было не более двух путешествующих команд.

Решение. Есть всего два варианта чередования: «хозяин, гость, хозяин, ...» или «гость, хозяин, гость, ...». Если путешествующих команд будет хотя бы 3, то у каких-то двух будет совпадать чередование. Рассмотрим данные две команды. В каждом туре они одновременно были хозяевами или гостями, а значит, не могли играть друг с другом, что противоречит условию задачи.

3. Прямая ℓ касается описанной окружности остроугольного треугольника ABC в точке A. Продолжения высот треугольника, проведённых из вершин B и C, пересекают прямую ℓ в точках D и E соответственно. Отрезки DC и EB пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q (отличных от C и B) соответственно. Докажите, что треугольник APQ — равнобедренный.



Решение. Обозначим угол ABC через β. Далее из суммы углов прямоугольного треугольника BC_1C находим угол BCC_1, и он равен $90^\circ - \beta$.

По теореме об угле между хордой и касательной $\angle CAD = \angle CBA = \beta$. Из суммы углов прямоугольного треугольника AB_1D вычисляем угол B_1DA и получаем $90^\circ - \beta$.

Выходит, что $\angle BCE = 90^\circ - \beta = \angle BDE$. Значит, четырёхугольник $BCDE$ — вписанный, и тогда $\angle EBD = \angle ECD$.

Легко заметить, что углы ABB_1 и ACC_1 равны, так как оба дополняют угол BAC до 90°.

Комбинируя полученные ранее равенства углов, можно написать

$$\angle EBA = \angle EBD - \angle ABB_1 = \angle ECD - \angle ACC_1 = \angle DCA.$$

Поскольку углы EBA и DCA равны, то равны и дуги, на которые эти углы опираются: дуги QA и PA. Но тогда равны и хорды, стягивающие эти дуги. Таким образом, $AP = AQ$, и треугольник APQ — равнобедренный.

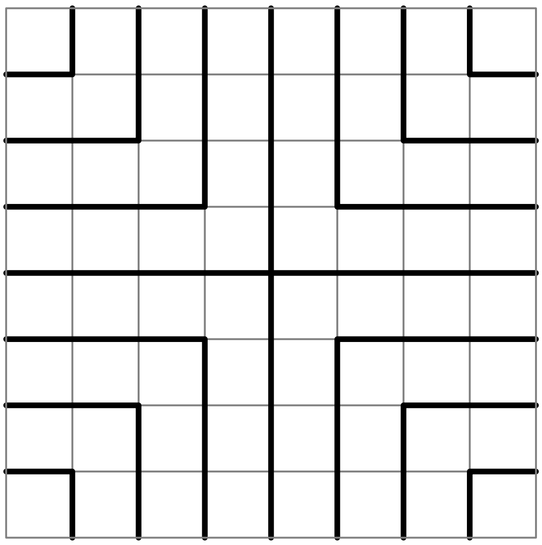
4. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Стороны клеток покрасили так, что у каждой клетки ровно две покрашенные стороны и ни одна покрашенная сторона не лежит на периметре данного квадрата $n \times n$. При каких n это возможно?

Решение.

Ответ: при чётных n.

Раскрасим все клетки в чёрный и белый цвет в шахматном порядке (так, чтобы любые две соседние по стороне клетки были разного цвета). Каждая покрашенная сторона прилегает ровно к одной чёрной клетке и ровно к одной белой. Тогда количество покрашенных сторон равно удвоенному количеству чёрных клеток (у каждой клетки ровно две стороны отмечено) и равно удвоенному количеству белых клеток. Значит, количества белых и чёрных клеток совпадают, а такое возможно только в квадратах с чётной стороной.

Для чётного n покрасим стороны клеток так, как показано на рисунке:



5. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условию $a_p + a_q = a_r + a_s$ для всех натуральных p, q, r, s, связанных соотношением $p \cdot q = r \cdot s$. Докажите, что $a_m \leqslant a_{mn}$ для любых натуральных m и n.

Решение. Известно, что $a_m + a_n = a_{mn} + a_1$, а значит, неравенство $a_m \leqslant a_{mn}$ при любых m и n эквивалентно $a_n \geqslant a_1$ при любом n. Предположим, что это не так, тогда нашлось такое n, что $a_1 > a_n$. Рассмотрим равенство $a_n + a_n = a_{n^2} + a_1$; если $a_1 > a_n$, то $a_{n^2} < a_n$. Далее рассмотрим равенство $a_n + a_{n^2} = a_{n^3} + a_1$ и получим, что $a_{n^2} > a_{n^3}$; аналогично из $a_n + a_{n^3} = a_{n^4} + a_1$ получим $a_{n^3} > a_{n^4}$ и т. д. Получаем цепочку неравенств $a_1 > a_n > a_{n^2} > a_{n^3} > \ldots$; заметим, что все числа по условию натуральные и каждое следующее строго меньше предыдущего, а такого быть не может. Противоречие.