Отборочная олимпиада

1. Докажите, что любые положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

2. Методкомиссия, состоящая из 40 членов жюри, подбирает вторую задачу в вариант олимпиады. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить в вариант задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причём любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

3. Петя и Вася играют в игру на изначально белой доске 20×20. Петя начинает и каждым своим ходом закрашивает одну клетку доски в красный цвет, а Вася — в синий. Игроки ходят поочерёдно, перекрашивать ранее закрашенные клетки запрещено. В конце игры (когда все клетки доски закрашены) Петя находит красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Вася платит ему столько долларов, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Петя вне зависимости от игры Васи?

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A. На дуге AB описанной окружности треугольника ABD, не содержащей точки D, выбрана точка P. Луч PA пересекает луч CD в точке Q. Точка O — центр описанной окружности треугольника CPQ. Докажите, что если $O \neq D$, то $OD \perp AD$.

5. Федя выписывает слева направо бесконечную последовательность ненулевых цифр. После выписывания каждой цифры он раскладывает получившееся на данный момент число на простые множители. Докажите, что рано или поздно один из этих простых множителей окажется больше миллиона.