Отборочная олимпиада, краткие решения

1. Докажите, что любые положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству
$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Решение. Введём обозначения: $A = a(a+b+c)$, $B = bc$.
$$(a+b)(a+c) = A + B \geqslant 2\sqrt{AB} = 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

2. Методкомиссия, состоящая из 40 членов жюри, подбирает вторую задачу в вариант олимпиады. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить в вариант задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причём любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

Решение. Предположим противное: подходящей задачи нет. Тогда каждую задачу, которую хоть кто-то не решил, не решили как минимум по 21 члену жюри. Такие задачи будем называть *сложными*.

Каждый член жюри не решил по 4 задачи, то есть всего нерешений было получено 160. У каждой сложной задачи как минимум 21 нерешение, откуда количество k сложных задач не превосходит $[160/21] = 7$.

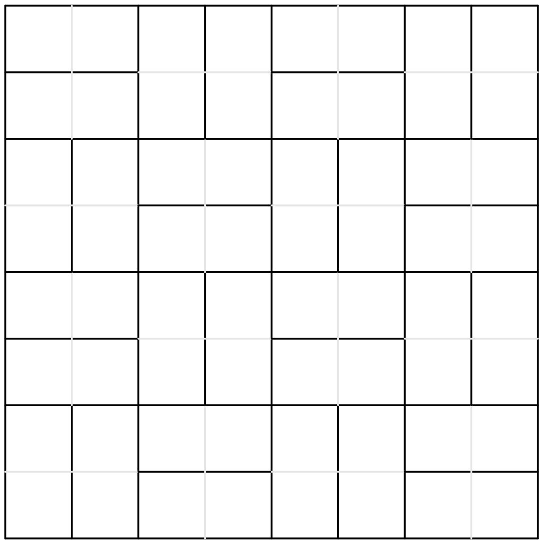
По условию все члены жюри не решили разные наборы из четырёх задач, то есть численность жюри не должна превосходить количества всевозможных четвёрок сложных задач: $40 \leqslant C_k^4$. Но при $k \leqslant 7$ это неравенство не может быть выполнено. Противоречие.

3. Петя и Вася играют в игру на изначально белой доске 20×20. Петя начинает и каждым своим ходом закрашивает одну клетку доски в красный цвет, а Вася — в синий. Игроки ходят поочерёдно, перекрашивать ранее закрашенные клетки запрещено. В конце игры (когда все клетки доски закрашены) Петя находит красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Вася платит ему столько долларов, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Петя вне зависимости от игры Васи?

Решение. *Ответ:* 4 доллара.

Стратегия Васи. Докажем, что существует способ игры за Васю, гарантирующий, что все красные прямоугольники будут площади меньше 5.

Разобьём доску на квадратики 2×2, покрасим мысленно эти квадратики в чёрный и белый цвет в шахматном порядке. Разобьём каждый чёрный квадратик на две горизонтальные доминошки, каждый белый — на две вертикальные.



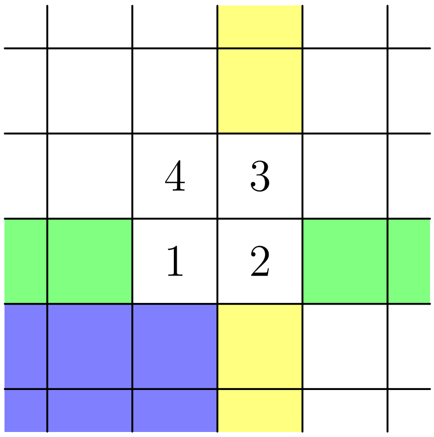
Вася будет каждый раз закрашивать клетку в той же доминошке, в которой закрасил клетку Петя.

Ясно, что любой клетчатый прямоугольник площади хотя бы 5 содержит внутри себя либо прямоугольник 3×2, либо прямоугольник 5×1. Но легко видеть, что любой прямоугольник таких размеров содержит целиком как минимум одну доминошку, то есть в конце игры будет содержать хотя бы одну синюю клетку.

Стратегия Пети. Докажем, что Петя может добиться заработка в 4 доллара.

Наблюдение. Если после хода Васи существует строка, в которой есть ровно две красные соседние некрайние клетки, и больше ничего не закрашено, то Петя через два хода может получить красный прямоугольник 4×1.

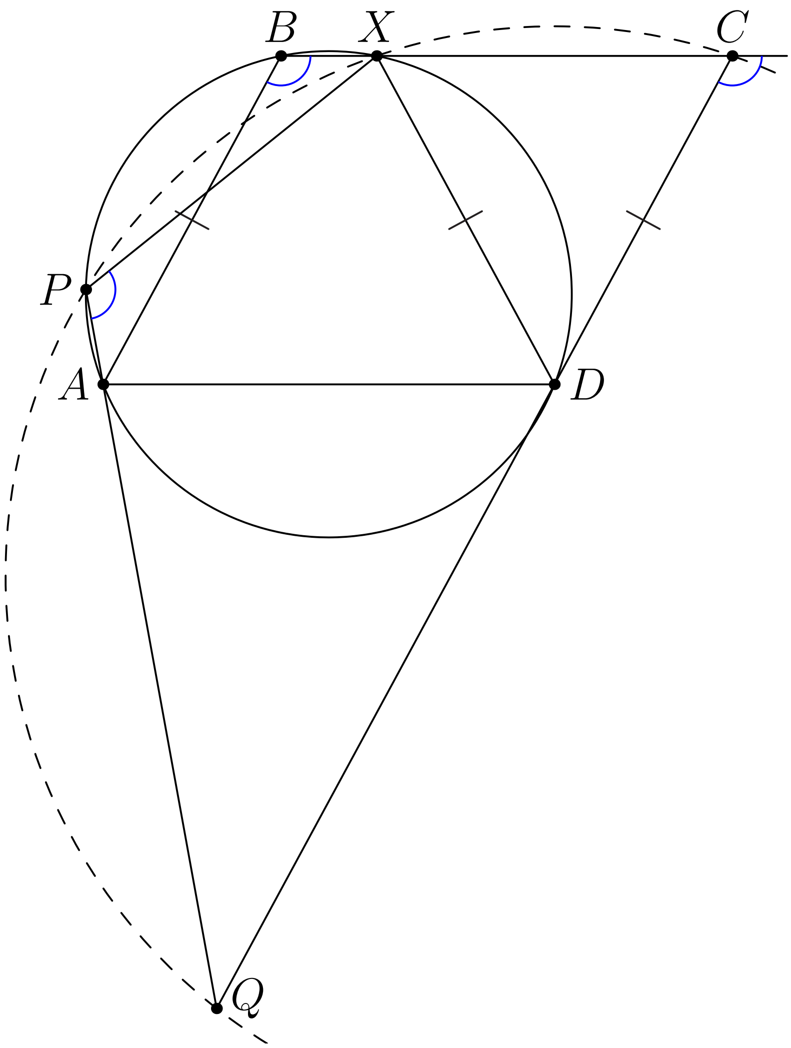
Смотрите картинку. Первым ходом закрасим любую клетку центрального квадрата 2×2 (отмечена цифрой 1). Вася закрасит какую-то клетку доски синим. Для удобства можно повернуть доску так, чтобы закрашенная Васей клетка была ниже и неправее клетки с цифрой 1 (синяя зона на картинке). *Центр картинки не обязательно совпадает с центром квадрата* 20×20.



Далее закрасим клетку 2. По наблюдению Вася обязан закрасить клетку в зелёной зоне, иначе проиграет. Затем закрасим клетку 3. Вася должен закрасить клетку в жёлтой зоне, иначе проиграет. Последним ходом закрашиваем клетку 4 и получаем квадрат 2×2.

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A. На дуге AB описанной окружности треугольника ABD, не содержащей точки D, выбрана точка P. Луч PA пересекает луч CD в точке Q. Точка O — центр описанной окружности треугольника CPQ. Докажите, что если $O \neq D$, то $OD \perp AD$.

Решение. Рассмотрим вторую точку X пересечения окружности (ABD) и прямой BC. Ясно, что $ABXD$ — равнобедренная трапеция (ну или $AXBD$, зависит от картинки). Тогда $XD = AB = CD$, то есть точка D лежит на серпере к отрезку XC.



Заметим, что точки C, X, P, Q лежат на одной окружности. Действительно, посчитаем направленные углы: $\measuredangle XPQ = \measuredangle XPA = \measuredangle XBA = \measuredangle(XB, BA) = \measuredangle(XC, CD) = \measuredangle XCQ$ (использована концикличность точек A, B, P, X и параллельность прямых AB и CD). Центр O окружности (CPQ) лежит на серпере к её хорде XC.

Таким образом, обе точки D и O лежат на серпере к отрезку XC, то есть $DO \perp XC \parallel AD$, что и требовалось установить.

5. Федя выписывает слева направо бесконечную последовательность ненулевых цифр. После выписывания каждой цифры он раскладывает получившееся на данный момент число на простые множители. Докажите, что рано или поздно один из этих простых множителей окажется больше миллиона.

Решение. Предположим противное.

Перечислим все простые числа, меньшие миллиона: $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Обозначим их произведение через Π. Выберем такое число K, что $2^K > 10^N$. Рассмотрим $N+1$ подряд идущих членов нашей последовательности, каждый из которых больше числа Π^{K-1} (так как последовательность неограниченно растёт, такие существуют). Выбранные члены обозначим $b_0 < b_1 < \ldots < b_N$.

Из предположения противного следует, что в разложении чисел b_i на простые множители участвуют только p_j в некоторых степенях. Раз $b_i > \Pi^{K-1}$, то как минимум одно простое число из списка $p_1, p_2, \ldots, p_N$ входит в b_i в степени, не меньшей K. Назовём этот простой делитель *главным* для числа b_i (если таких простых делителей несколько, назовём главным один любой).

Согласно принципу Дирихле, у каких-то двух чисел из набора $b_0, b_1, \ldots, b_N$ главные простые делители совпадают. Обозначим эти числа b_m и b_n, $m < n$. Они оба делятся на p_j^K. Но тогда и $b_n - 10^{n-m} b_m$ делится на p_j^K. С другой стороны, при вычитании из b_n числа $10^{n-m} b_m$ все цифры в начале уничтожатся, и останется лишь ненулевое число из $n-m$ цифр, то есть

$$0 < b_n - 10^{n-m} b_m < 10^{n-m} \leqslant 10^N < 2^K \leqslant p_j^K,$$

что противоречит делимости $b_n - 10^{n-m} b_m$ на p_j^K.