Отборочная олимпиада

1. Существует ли бесконечное подмножество множества натуральных чисел, в котором любые два числа не являются взаимно простыми, а любые десять — взаимно просты в совокупности?

2. Сколько существует прямых, проходящих через точку $(0, 2019)$ и пересекающих параболу $y = x^2$ в двух точках с целыми координатами?

3. В городе 8 улиц идут с запада на восток, и ещё 8 улиц — с севера на юг, образуя 64 перекрёстка. Перекрёстки в шахматном порядке раскрашены в чёрный и белый цвета. Часть дорог занесло снегом так, что в городе не осталось ни одного циклического маршрута, однако, между любыми двумя перекрёстками какой-то путь остался. Назовём *тупиком* перекрёсток, из которого исходит лишь одна незаснеженная дорога, связывающая его с соседним перекрёстком. Может ли так оказаться, что все тупики раскрашены в чёрный цвет? (Дорога — участок улицы, ограниченный двумя перекрестками.)

4. В остроугольном треугольнике ABC $(AB < AC)$ проведена биссектриса AD и отмечена середина M стороны BC. Докажите, что прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и ADM, параллельна прямой AD.

5. В каждой клетке нижней строки прямоугольника $2 \times 2n$ размещено по одной фишке. Все фишки пронумерованы числами $1, 2, \ldots, 2n$ слева направо. За одну операцию разрешается передвинуть любую фишку в соседнюю по стороне пустую клетку. Какое наименьшее количество операций требуется для того, чтобы разместить фишки в нижней строке в обратном порядке?

6. Даны натуральное число $n \geqslant 2$ и положительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие следующему соотношению при всех $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$x_{k-1} - x_{k+1} = (x_{k-1} + x_k)(x_k + x_{k+1}).$$

Докажите, что $x_n < \frac{1}{n-1}$.