Отборочная олимпиада, краткие решения

1. Существует ли бесконечное подмножество множества натуральных чисел, в котором любые два числа не являются взаимно простыми, а любые десять — взаимно просты в совокупности?

Решение. *Ответ:* нет, не существует.

Предположим противное: пусть такое подмножество есть. Рассмотрим произвольный элемент n этого подмножества. Обозначим все простые множители числа n через $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Заметим, что из-за отсутствия пар взаимно простых элементов в подмножестве набор простых множителей любого другого элемента подмножества должен содержать хотя бы одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. В силу бесконечности подмножества, найдётся число p_i, входящее в разложение бесконечного количества чисел из подмножества. Взяв 10 элементов подмножества, содержащих в своём разложении p_i, приходим к противоречию.

2. Сколько существует прямых, проходящих через точку $(0, 2019)$ и пересекающих параболу $y = x^2$ в двух точках с целыми координатами?

Решение. *Ответ:* 4.

Рассмотрим прямую, соединяющую две произвольные точки (x_1, x_1^2) и (x_2, x_2^2) параболы $y = x^2$. Предположим, эта прямая задаётся уравнением $y = kx + b$. Абсциссы общих точек прямой и параболы можно найти, приравняв правые части уравнений прямой и параболы: $x^2 = kx + b$. Но мы-то знаем, что эти абсциссы равны x_1 и x_2. Значит, x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - kx - b = 0$, и по теореме Виета $-b = x_1x_2$. Таким образом, прямая через точки (x_1, x_1^2) и (x_2, x_2^2) нашей параболы пересекает ось Oy в точке с ординатой $-x_1x_2$.

Задача сводится к следующей: «Сколько существует способов разложить число -2019 в произведение двух различных целых чисел?». Очевидно, таких разложений четыре:

$$-2019 = -2019 \cdot 1 = -673 \cdot 3 = -3 \cdot 673 = -1 \cdot 2019.$$

3. В городе 8 улиц идут с запада на восток, и ещё 8 улиц — с севера на юг, образуя 64 перекрёстка. Перекрёстки в шахматном порядке раскрашены в чёрный и белый цвета. Часть дорог занесло снегом так, что в городе не осталось ни одного циклического маршрута, однако, между любыми двумя перекрёстками какой-то путь остался. Назовём *тупиком* перекрёсток, из которого исходит лишь одна незаснеженная дорога, связывающая его с соседним перекрёстком. Может ли так оказаться, что все тупики раскрашены в чёрный цвет? (Дорога — участок улицы, ограниченный двумя перекрестками.)

Решение. *Ответ:* нет, не может.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются перекрёстки, а рёбрами — незаснеженные улицы. В условии задачи фактически написано, что этот граф связный и не содержит циклов — то есть является деревом. В дереве на 64 вершинах должно быть ровно 63 ребра.

Предположим противное: пусть все тупики чёрные. Тогда все белые вершины графа — не тупики, то есть из них исходит хотя бы по два ребра. Ясно, что все эти рёбра различны. Но тогда получается, что в графе как минимум $2 \cdot 32 = 64$ ребра. Противоречие.

4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AD и отмечена середина M стороны BC. Докажите, что прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и ADM, параллельна прямой AD.

Решение. Рассмотрим середину N дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Ясно, что точка N лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, то есть $\angle NMD = 90°$. Кроме того, AN — внешняя биссектриса угла BAC, и потому перпендикулярна внутренней биссектрисе AD, то есть $\angle NAD = 90°$. Выходит, что четырёхугольник $NMDA$ — вписанный, значит, точка N лежит на описанной окружности треугольника ADM.

Линия центров окружностей (ABC) и (ADM) перпендикулярна их общей хорде AN. Как доказано ранее, $AN \perp AD$. Таким образом, линия центров окружностей (ABC) и (ADM) параллельна прямой AD, что и хотелось доказать.

5. В каждой клетке нижней строки прямоугольника $2 \times 2n$ размещено по одной фишке. Все фишки пронумерованы числами $1, 2, \ldots, 2n$ слева направо. За одну операцию разрешается передвинуть любую фишку в соседнюю по стороне пустую клетку. Какое наименьшее количество операций требуется для того, чтобы разместить фишки в нижней строке в обратном порядке?

Решение. *Ответ:* $2 \cdot (2n-1) + 2 \cdot n^2 = 2n^2 + 4n - 2$.

Оценка. Заметим, что в любой паре фишек есть как минимум одна, которая поднимается в верхнюю строку, иначе фишки в рассматриваемой паре никак не смогли бы поменяться местами. Значит, существует не более одной фишки, вообще не совершавшей вертикальных ходов. Поднявшись в верхнюю строку, фишка должна когда-то спуститься обратно. Таким образом, потребуется как минимум $2 \cdot (2n-1)$ вертикальных ходов.

Далее, каждая из фишек с номерами k и $2n+1-k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) должна совершить как минимум $(2n+1-2k)$ горизонтальных ходов.

Таким образом, количество операций должно быть не меньше чем

$$2 \cdot (2n-1) + 2\big((2n-1) + (2n-3) + \ldots + 3 + 1\big) = 2 \cdot (2n-1) + 2 \cdot n^2 = 2n^2 + 4n - 2\,.$$

Пример. Для того чтобы справиться за указанное количество операций, можно действовать, например, следующим образом.

С фишками с номерами от 1 до n проделываем по очереди следующие операции: поднимаем в верхнюю строку и задвигаем в крайне правое из возможных положений. Далее, фишки с номерами от $n+1$ до $2n-1$ по очереди двигаем налево до позиций, которые они должны занять в окончательной расстановке, и сдвигаем их наверх. После этого передвигаем фишку с номером $2n$ в крайнее левое положение в нижней строке. После чего все фишки с 1 по $2n-1$ сдвигаем вниз.

В результате все фишки, кроме $2n$, сдвигались один раз наверх и один раз вниз. Далее, все фишки по горизонтали пропутешествовали наименьшее возможное количество ходов. Это соответствует приведенной выше оценке.

6. Даны натуральное число $n \geqslant 2$ и положительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие следующему соотношению при всех $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$x_{k-1} - x_{k+1} = (x_{k-1} + x_k)(x_k + x_{k+1}).$$

Докажите, что $x_n < \frac{1}{n-1}$.

Решение. Для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ введём $y_k = x_{k-1} + x_k$. Теперь рекуррентное соотношение из условия задачи можно переписать по-другому:

$$\begin{aligned} y_k - y_{k+1} = (x_{k-1} + x_k) - (x_k + x_{k+1}) = x_{k-1} - x_{k+1} = \\ = (x_{k-1} + x_k)(x_k + x_{k+1}) = y_k \cdot y_{k+1}. \end{aligned}$$

Иными формулами, $y_k = \dfrac{y_{k+1}}{1 - y_{k+1}}$. В частности, $y_{n-1} = \dfrac{y_n}{1 - y_n}$.

Математической индукцией легко показать, что при всех $1 \leqslant i \leqslant n-1$ выполнено соотношение $y_{n-i} = \dfrac{y_n}{1 - i \cdot y_n}$. База $i = 1$ уже проверена, докажем утверждение шага $i \to i+1$ индукции.

По предположению индукции $y_{n-i} = \dfrac{y_n}{1 - i \cdot y_n}$. Кроме того, $y_{n-i-1} = \dfrac{y_{n-i}}{1 - y_{n-i}}$. Подставляя первое равенство во второе, получаем, что

$$y_{n-i-1} = \frac{\dfrac{y_n}{1 - i \cdot y_n}}{1 - \dfrac{y_n}{1 - i \cdot y_n}} = \frac{y_n}{1 - (i+1) \cdot y_n}.$$

Переход индукции доказан.

Подставляя параметр $i = n-1$ в доказанное индукцией утверждение, получаем, что $y_1 = \dfrac{y_n}{1 - (n-1) \cdot y_n}$. По условию задачи все x_i — положительные числа, а значит и y_i тоже. Для того, чтобы y_1 было положительным, необходимо, чтобы y_n было меньше $\frac{1}{n-1}$. Таким образом, $x_n < x_{n-1} + x_n = y_n < \frac{1}{n-1}$.