Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Определение. Элементарные симметрические многочлены

$$e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Основная теорема о симметрических многочленах. Всякий симметрический многочлен (с рациональными/вещественными/комплексными коэффициентами) единственным образом представляется в виде многочлена (с коэффициентами в том же поле) от элементарных симметрических многочленов.

Более того, всякий симметрический многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ единственным образом представляется в виде многочлена с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ от элементарных симметрических многочленов.

1. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $q = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
(a) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
(b) Для любого монома q вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n};\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что старший моном многочлена $e_1^{\beta_1} e_2^{\beta_2} \cdots e_n^{\beta_n}$ совпадает с q, причем числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ определены этим условием однозначно.
(c) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

2. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа
(a) $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$;
(b) $y_1 = x_2 x_3$, $y_2 = x_1 x_3$, $y_3 = x_1 x_2$.

3. Про целые числа a, b, c известно, что $a+b+c = 0$. Докажите, что число $2a^4+2b^4+2c^4$ является квадратом целого числа.

4. Дан многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен от его (комплексных) корней есть рациональное число.

5. Многочлен $x^{2019} + y^{2019}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(xy, x+y)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

6. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $x^3 + px + q \quad (p, q \in \mathbb{R};\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C})$.
(a) Выразите через p и q число

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

Это число называется *дискриминантом* многочлена x^3+px+q. Мы, таким образом, получили необходимое и достаточное условие на p и q, при котором многочлен x^3+px+q имеет кратный корень.

(b) Найдите необходимое и достаточное условие на p и q, при котором многочлен x^3+px+q имеет три вещественных корня (возможно, кратных).

7. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\dots\pm\sqrt{2019}$ является целым числом.