Серия 7. Числа Каталана

Правильной скобочной последовательностью называется последовательность скобок такая, что количество открывающих и закрывающих скобок в ней совпадают, а в любом её префиксе количество открывающих скобок не меньше количества закрывающих. Количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$ называется n-ым числом Каталана C_n.

1. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \ldots + C_nC_0 \ (n \geqslant 0)$$

и начальным членом $C_0 = 1$.

2. **(a)** Частица вылетает из точки $(0, 0)$ и за одну секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу вверх. Докажите, что количество способов добраться до точки (n, n), не поднимаясь выше прямой $y = x$, равно C_n.
(b) Докажите, что количество способов, которыми частица может добраться до точки (n, n), поднявшись выше прямой $y = x$, совпадает с количеством способов, которыми частица может добраться до точки $(n - 1, n + 1)$.
(c) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

3. Найдите количество триангуляций n-угольника. Триангуляции, отличающиеся поворотом, считаются различными.

4. *Бинарными деревьями* называются корневые деревья, у каждой вершины которого либо 2 либо 0 потомков. Найдите количество бинарных деревьев с n листьями.

5. Найдите количество способов разбить целые числа от 1 до $2n$ на пары так, чтобы для любой четвёрки чисел $p < q < r < s$ в разбиение не могут одновременно входить пары
(a) (p, r) и (q, s);
(b) (p, s) и (q, r).

6. Найдите количество таблиц $2 \times n$, в которые вписаны числа от 1 до $2n$ каждое по одному разу, и в каждой вертикали и горизонтали которых числа возрастают.

7. Частица и античастица зарождаются в момент времени 0 в точке $(0, 0)$. Каждая из них за секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу расстояния вверх. В момент времени $n + 1$ они впервые встретились и аннигилировали. Сколькими способами это могло произойти?

8. Найдите количество последовательностей натуральных чисел

$$1, a_1, \ldots, a_n, 1$$

в которых $a_i > 1$ и любое a_i является делителем суммы двух соседей.