Серия 3. Возвращение вероятности

Условная вероятность события A при условии события B (*события* — это подмножества вероятностного пространства) определяется формулой $\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)}$.

Два события (т. е. подмножества вероятностного пространства) A и B называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(A\cap B) = \mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(B)$. События $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого конечного поднабора событий A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_k} выполнено

$$\mathsf{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\cdot\mathsf{P}(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot\mathsf{P}(A_{i_k}).$$

1. Докажите **формулу полной вероятности**: если события $B_1, \ldots, B_n$ попарно не пересекаются и покрывают всё вероятностное пространство, а A — какое-то событие, то $\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A|B_i)\cdot\mathsf{P}(B_i)$.

2. **(a)** Докажите **формулу Байеса**: $\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}\cdot\mathsf{P}(B|A)$.

(b) («Байесова ловушка») Одним утром Незнайка начал подозревать у себя синдром Мюнхгаузена, который встречается в мире лишь в 0.1% случаев. Доктор Пилюлькин провел над Незнайкой один тест, который оказался положительным. Известно, что вне зависимости от того, болен ли тестируемый, точность этого теста составляет 99%. Выясните, с какой вероятностью Незнайка действительно болен синдромом.

3. На долго стоявшем подносе лежали 15 пирожков с капустой, 12 — с яблоками и 8 — с мясом. Согласно статистике, вероятность заболеть после поедания пирожка с капустой составляет $1/2$, после пирожка с яблоками — $1/4$, а после пирожка с мясом — $2/3$. Сегодня утром наш Герой съел пирожок с подноса и попал в медпункт. Какова вероятность того, что во всем виновата капуста?

4. На первом этаже семнадцатиэтажного здания в лифт вошли десять человек. Предполагая, что каждый из вошедших (независимо от остальных) может с равной вероятностью жить на любом из шестнадцати этажей (со 2-го по 17-й), найдите математическое ожидание числа остановок лифта.

5. При посадке в самолёт выстроилась очередь из 100 пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из 100 мест. Первым в самолёт зашёл наглый депутат и сел на случайное место (возможно, и на своё). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место занято, садятся случайным образом на свободное место. Найдите вероятность того, что последний пассажир займёт своё место.

6. Рассмотрим следующую игру. Ведущий приносит два конверта, в каждом из них лежит чек на некоторую сумму (суммы — различные натуральные числа). В Вашем распоряжении есть монетка, которая при подбрасывании с вероятностью $1/2$ падает решкой вверх, и с вероятностью $1/2$ — орлом. Вам разрешается посмотреть содержимое одного конверта (на ваш выбор), и затем решить, какой конверт Вы заберёте себе. Докажите, что существует алгоритм действий, который при любом распределении сумм в конвертах позволяет с вероятностью строго большей, чем $1/2$, выбрать конверт, в котором сумма больше.