Серия 2. Разнобой по алгебре и ТЧ

1. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab + 9b + 81 \,\vdots\, 101$, $bc + 9c + 81 \,\vdots\, 101$. Докажите, что $ca + 9a + 81 \,\vdots\, 101$.

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что многочлен $f(f(x))$ имеет ровно три различных корня. Может ли многочлен $f(f(f(x)))$ иметь семь различных корней?

3. Найдите все такие тройки натуральных чисел a, k, p, что p – простое и верно равенство $a^p + 1 = p^k$.
Если будете в тупике, то посмотрите листок для групп 9-1 и 9-2 от 17.12.2018.

4. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Может ли уравнение $f(f(x)) = x$ иметь ровно три действительных корня?

5. Про различные действительные числа a и b известно, что при любом натуральном k число $a^k - b^k$ – целое. Докажите, что a и b целые.

6. Через $\sigma(n)$ обозначим сумму цифр числа n.
(a) Докажите, что найдётся бесконечно много n таких, что $\sigma(3^{n+1}) \leqslant \sigma(3^n)$.
(b) Докажите, что найдётся бесконечно много n таких, что $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$.
(c) Докажите, что $\sigma(2^n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

7. Количество рыб в пруду будем выражать действительным числом от 0 до 1 (0 – рыб нет, 1 – весь пруд в рыбах). Известно, что если в каком-то году количество рыб в пруду было x, то в следующем оно будет
(a) $2x(1-x)$
(b) $3x(1-x)$
(c) $4x(1-x)$
Местный рыбак Фёдор сказал, что в последний раз столько же рыб, сколько и в 2019 году, было в 2015 году. Могли ли его слова оказаться правдой?