Серия 1. Добрый комбинаторный разнобой

1. Клетки таблицы $n \times n$ заполнены знаками «+» и «−». За одну операцию разрешается выбрать один ряд (столбец или строку) и заменить все знаки в этом ряду на противоположные. Известно, что с помощью таких операций можно изначальную таблицу превратить в таблицу из одних плюсов. Докажите, что это можно сделать, потратив не более n операций.

2. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку „сдал“ к концу экзамена?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал». После того, как все студенты получат оценку, придёт инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранён от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт. Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку «сдал»?

3. Возможно ли раскрасить грани кубика $1\times1\times1$ в чёрный и в белый цвета таким образом, чтобы его можно было поставить на некоторую клетку шахматной доски 8×8 и прокатить по доске (каждый раз перекатывая через рёбра) так, чтобы кубик побывал на каждой клетке доски хотя бы по разу и чтобы квадрат 1×1, по которому соприкасаются доска и кубик, и на доске, и на кубике всё время был раскрашен в один и тот же цвет?

4. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящим по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2019 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией. Могли ли слова барона оказаться правдой?

5. Докажите, что числа $1, 2, \ldots, 2019$ можно покрасить в четыре цвета так, чтобы не было одноцветных арифметических прогрессий из 10 членов.

6. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?