Графы. Добавка

1. На научный конгресс приехали $2n$ участников, каждый из которых имеет среди других участников ровно $n-1$ знакомых. При каких n всех участников можно гарантированно разбить на пары так, чтобы в каждый паре были знакомые между собой люди?

Ответ: при четных n.

Пример для нечетных. Если граф состоит из двух компонент связности — клик размера n — то разбить его на пары не удастся.

Решение для четных. Выделим наибольшее количество вершин в пары (максимальное паросочетание); предположим, что осталось еще $2n-2k$ вершин не в парах. Ясно, что друг с другом оставшиеся вершины не соединены.

Рассмотрим то, как оставшиеся вершины A_i соединены с некоторой выделенной парой B–C. Можно заметить, что путь вида A_i–B–C–A_j образоваться не может, так как в этом случае B–C можно заменить на два ребра A_i–B и C–A_j и увеличить паросочетание. Это означает, что либо B и C соединены только с одной вершиной из $\{A_i\}$, либо одна из B или C вообще не соединена с $\{A_i\}$. В обоих этих случаях количество ребер, соединяющих $\{B, C\}$ с $\{A_i\}$, не превосходит $2n-2k$.

Это означает, что общее количество ребер, соединяющих выделенные k пар с оставшимися вершинами, не превосходит $k(2n-2k)$. С другой стороны, у каждой из оставшихся вершин степень равна $n-1$, и друг с другом они не соединены. Имеем

$$k(2n-2k) \geqslant (2n-2k)(n-1),$$

откуда $k \geqslant n-1$, то есть оставшихся вершин не более двух. Разберем этот случай.

В указанном выше неравенстве должно достигаться равенство, поэтому каждая выделенная пара соединена с оставшимися вершинами A_1 и A_2 двумя ребрами. Разобьем выделенные пары на три группы: в группе *1* обе вершины пары соединены с A_1, в группе *2* обе вершины пары соединены с A_2, а в группе ζ одна из вершин соединена с A_1 и A_2, а вторая с ними не соединена (как уже упоминалось, во всех остальных случаях паросочетание можно расширить).

Заметим, что степени вершин A_1 и A_2 равны $n-1$ и нечетны, поэтому группа ζ непуста. Пары из этой группы обозначим за B_i–C_i, где C_i — это вершина, соединенная с A_1 и A_2, а B_i — нет. Посмотрим, с какими вершинами вообще может быть соединена B_i, кроме C_i. Если она соединена с вершиной P пары P–Q из группы *1*, то можно разбить пары B_i–C_i, P–Q и добавить A_2–C_i, B_i–P, Q–A_1, что увеличит наше паросочетание. Следовательно, с парами из групп *1* и *2* вершина B_i соединена быть не может. По схожим причинам она не может быть соединена с другой B_j: тогда можно было бы добавить пары A_1–C_i, B_i–B_j, C_j–A_2.

Это означает, что все B_i соединены только с C_j (включая $j=i$). Но так как степень B_j равна $n-1$, то пар в группе ζ должно быть $n-1$, то есть все пары только такие. При этом все B_i соединены со всеми C_j. Осталось рассмотреть произвольную вершину C_j. Ее степень равна $n+1$, так как она соединена со всеми B_i и с A_1 и A_2. Это противоречит условию.

2. Рёбра полного графа раскрашены в три цвета, причём между любыми двумя вершинами есть пути каждого цвета. Докажите, что найдётся треугольник, рёбра которого разноцветны.

Решение. Предположим противное, и рассмотрим минимальный по количеству вершин контрпример. В нём граф на ребрах каждого из трех цветов связен. Ясно, что при выкидывании произвольной вершины треугольников появиться не может, значит, нарушится именно условие связности одного из цветов.

Пусть при выкидывании вершины X граф на ребрах цвета 1 распался на несколько компонент связности (далее просто «компоненты»). Рассмотрим две произвольные компоненты и докажем, что все ребра между ними одного цвета. Действительно, пусть ребро $A{-}B$ имеет цвет 2, где A и B из разных компонент. Тогда вершину A можно заменить на любую соседнюю по цвету 1 вершину A_1: в треугольнике ABA_1 ребро $A_1{-}B$ не может иметь цвет 1 (они из разных компонент), и не может иметь цвет 3 (тогда образуется разноцветный треугольник). Это означает, что B соединена со всеми вершинами компоненты A одним и тем же цветом; аналогично можно заменять B на любую вершину ее компоненты.

Теперь вернем выкинутую вершину X. Из нее, как и из любой другой вершины графа до выкидывания, выходит хотя бы по одному ребру цветов 2 и 3; кроме того, в любую компоненту из нее выходит хотя бы по одному ребру цвета 1, ведь изначально граф цвета 1 был связен.

Пусть ребро XX_2 имеет цвет 2. Заметим, что компонента вершины X_2 с другими компонентами может соединяться только цветом 2. Действительно, пусть X_2 соединена с некоторой другой компонентой ребрами цвета 3. Тогда в этой компоненте выберем вершину T, соединенную с X цветом 1; получаем, что XX_2T — разноцветный треугольник.

Теперь рассмотрим вершины X_2 и X_3, соединенные с вершиной X цветами 2 и 3 соответственно. Компонента X_2 должна быть связана со всеми другими компонентами цветом 2, а компонента X_3 — цветом 3. Это может оказаться одна и та же компонента или две разных — в любом случае, получаем противоречие.

3. Докажите, что можно расставить по кругу 512 нулей и 512 единиц с условием, чтобы при обходе круга по часовой стрелке все последовательности из десяти подряд идущих чисел были различными.

Решение. Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого являются всевозможные 9-значные комбинации нулей и единиц, а каждой 10-значной комбинации соответствует ребро $a{\to}b$, где a — префикс данной комбинации, а b — её суффикс. Иначе говоря, проводятся всевозможные ребра вида $xs{\to}sy$, где s — 8-значная комбинация, а x и y — цифры 0 или 1. (Стоит отметить, что в полученном графе есть две петли $0...0{\to}0...0$ и $1...1{\to}1...1$).

Заметим, что в полученном графе есть ориентированный эйлеров цикл. Действительно, и входящая, и исходящая степени каждой вершины равны по 2; кроме того, от любой вершины можно добраться до любой другой ровно за 9 шагов (каждый шаг является сдвигом имеющейся последовательности с приписыванием произвольной цифры), то есть граф связен. Рассмотрим эйлеров цикл. Он имеет длину 1024 — столько всего ребер в нашем графе.

На каждом ребре напишем первую цифру числа, из которого оно исходит. Тогда нетрудно видеть, что это ребро и девять последующих (по циклу) вместе дают ту самую комбинацию цифр, которой изначально это ребро соответствовало. Значит, если мы выпишем все цифры, соответствующие ребрам цикла, по кругу, то там окажутся представлены все 10-значные комбинации цифр.

То, что цифр 0 и 1 в этом круге будет поровну, следует из того, что встречаются они в среднем во всех комбинациях поровну.