Графы. Решения

1. На рёбрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны. Докажите, что получившийся ориентированный граф сильно связен.

Решение. Предположим противное, и рассмотрим компоненты сильной связности (их тогда несколько). Из них выберем ту, из которой не выходят ребра в другие компоненты. (Такая найдется, ведь иначе можно переходить от компоненты к компоненте по ребрам, а зацикливаться компоненты сильной связности не могут.)

Теперь заметим, что у этой компоненты суммарное количество входящих и исходящих её вершины ребер не сбалансировано: каждое ребро внутри компоненты учитывается и как входящее, и как исходящее, а внешние ребра могут быть только входящими; и внешние ребра есть, ведь компонента не может быть полностью изолированной. Это противоречит тому, что в любом множестве вершин суммарные количества входящих и исходящих ребер должны совпадать, что следует из условия задачи.

Другое решение. Докажем, что в нашем графе есть (ориентированный) эйлеров цикл. Просто построим его по такому же алгоритму, как он строится в обычном эйлеровом графе.

Сначала выберем произвольную вершину и будет идти по ребрам, не проходя ни по одному ребру дважды. Заметим, что закончиться этот обход может только в исходной вершине, ведь в любой другой окажется, что вошли мы в неё большее число раз, чем вышли.

Далее будем наращивать полученный цикл, пока он не будет включать в себя все ребра графа. Для этого заметим, что наш цикл не может оказаться изолирован от остальных ребер (это следует из связности графа). Тогда мы можем найти вершину цикла, из которой выходит ребро, не включенное в цикл. Перенесём начало цикла в эту вершину и построим расширенный цикл: сначала пройдемся по всему исходному циклу, а потом зайдём на новое ребро и завершим процесс так же, как в изначальном построении.

Ясно, что в конце концов мы исчерпаем все ребра. Из существования ориентированного эйлерова цикла (к тому же проходящего по всем вершинам) очевидно следует сильная связность графа: от любой вершины до любой другой можно добраться по циклу.

2. В некоторой стране есть $n > 3$ аэропортов и n авиакомпаний, выполняющих двусторонние рейсы. При этом каждая компания выполняет хотя бы один рейс, и каждая пара городов соединена рейсом ровно одной из авиакомпаний. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, состоящий из трёх рейсов, в котором никакие два рейса не выполняются одной и той же авиакомпанией.

Решение. Сначала построим цикл произвольной длины, в котором все авиакомпании разные. Для этого от каждой авиакомпании оставим по одному рейсу. Городов n, рейсов тоже n, то есть больше, чем в дереве, поэтому цикл найдется. (После этого все рейсы вернём обратно.)

Теперь будем уменьшать цикл, пока его не удастся стянуть до треугольника, сохраняя условие о том, что авиакомпании в нём не повторяются. Возьмем в цикле произвольную диагональ. Она «разбивает» цикл на две половины. Авиакомпания, отвечающая за диагональ, не присутствует хотя бы в одной половине, поэтому мы может объединить диагональ с этой половиной и получить меньший цикл. Процесс можно продолжать, пока в цикле есть диагональ, то есть его длина больше трех.

3. Некоторые города Графландии соединены двусторонними авиарейсами компании «Графские авиалинии» так, что из любого города можно долететь до любого другого, возможно, с пересадками. Авиакомпания открыла новый рейс между двумя городами, и оказалось, что из любого города теперь можно долететь до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Какое наибольшее количество рейсов могло быть необходимо, чтобы добраться из одного города в другой до этого?

Ответ: 4.

Пример: цикл длины 5, изначально разорванный в одном месте.

Оценка. Пусть изначально между некоторыми двумя вершинами A и F расстояние (т. е. длина кратчайшего пути) было не менее 5. Представим кратчайший путь между ними как

$$A{-}B{-}C{-}\ldots{-}D{-}E{-}F.$$

Так как путь кратчайший, то расстояние между любыми двумя вершинами, лежащими на этом пути, равно расстоянию вдоль этого пути, иначе путь можно было бы укоротить.

Заметим, что если между двумя вершинами изначальное расстояние было больше 2, то новое ребро должно быть инцидентно одной из этих вершин, так как оно должно участвовать в новом пути между ними, длина которого не превосходит 2. Отсюда ясно, что новое ребро должно быть инцидентно одной из вершин A или D, одной из B или E, и одной из C или F. Но это уже как минимум три вершины, а ребро может соединять только две.

4. В городе на каждую площадь выходит не менее трёх улиц. На улицах введено одностороннее движение так, что можно проехать с любой площади на любую другую. Докажите, что можно запретить движение между двумя площадями так, что проезд сохранится.

Решение. Сначала выделим в качестве связного подграфа некоторый цикл (для этого, например, можно выйти из некоторой вершины по произвольному ребру и вернуться некоторым путем). Далее запустим процесс расширения нашего связного подграфа, причём на каждом шаге в подграфе найдется вершина степени 2 (изначально любая вершина цикла такой и будет).

Возьмём в нашем подграфе вершину A степени 2. В исходном графе из нее должно выходить еще хотя бы одно ребро $A{-}B$. Если B принадлежит нашему подграфа, ребро $A{-}B$ и можно выкинуть: связность подграфа не нарушится, а на связность вершин подграфа с другими вершинами это повлиять не может. На этом процесс завершится.

Если же B не входит в наш подграф, мы может его расширить: выйдем из A в B и вернемся в подграф, и добавим к подграфу полученный путь. Вершина B теперь входит в новый подграф и имеет в нём степень 2.

Так как расширение подграфа не может происходить бесконечно, процесс завершится.

5. В волейбольном однокруговом турнире приняло участие 25 команд. Назовём три команды «нестабильной тройкой», если каждая из команд выиграла у одной другой из этой тройки (то есть A выиграла у B, B у C, C у A). Какое наибольшее количество нестабильных троек могло получиться?

Ответ: 650.

Решение. Всего троек команд $\binom{25}{3} = 2300$; найдём наименьшее количество *стабильных* троек, то есть тех, в которых одна из команд победила обе другие (будем такую команду называть *победителем*).

Если команда k победила a_k других команд, то она является победителем в $\binom{a_k}{2} = \frac{a_k \cdot (a_k - 1)}{2}$ тройках. Так как каждая стабильная тройка имеет единственного победителя, то их общее количество можно вычислить как

$$\frac{a_1(a_1-1)}{2} + \frac{a_2(a_2-1)}{2} + \ldots + \frac{a_{25}(a_{25}-1)}{2}.$$

При этом сумма $a_1 + \ldots + a_{25}$ равна общему количеству побед, т. е. количеству игр.

Заметим, что $f(t) = \frac{t(t-1)}{2}$ — выпуклая вниз функция, поэтому по неравенству Йенсена минимум $f(a_1) + \ldots + f(a_{25})$ оценивается снизу величиной $25 \cdot f(12) = 1650$, где 12 — среднее количество побед у команд (альтернативно, можно обойтись без неравенства Йенсена, раскрыв скобки и оценив сумму a_i^2 снизу через сумму a_i по неравенству о средних).

Получается, что стабильных троек не менее 1650, и достигается это количество, когда у всех команд побед поровну (такой пример можно построить, если выставить всех по кругу и победить каждой командой 12 следующих по часовой стрелке). Соответственно, нестабильных троек остается 650.