Процессы. Добавка (решения)

6. Во всех клетках на диагонали доски $n \times n$, $n \geqslant 4$, стоят знаки «+», в остальных клетках — «−». За ход в случайной строке либо столбце все знаки меняются на противоположные. Докажите, что в любой момент плюсов не менее n.

Решение. Для каждой клетки (k, k) на диагонали квадрата (то самой, на которой стояли знаки «+») построим *домик* — четверку клеток (k, k), $(k+1, k)$, $(k, k+2)$, $(k+1, k+2)$; всё индексы здесь считаются вычетами по модулю n. Заметим, что домики разных клеток не пересекаются: в столбце k находятся клетки (k, k) и $(k+1, k)$ из домика (k, k) и $(k-2, k)$, $(k-1, k)$ из домика $(k-2, k-2)$; другие домики на этот столбец не залезают.

1	8	1					8
1	2	1	2				
	2	3	2	3			
		3	4	3	4		
			4	5	4	5	
				5	6	5	6
7					6	7	6
7	8					7	8

Легко видеть, что так как каждый домик является пересечением двух строк и двух столбцов, то четность количества плюсов в нём при наших операциях не меняется. Изначально в каждом домике по одному плюсу, следовательно, хотя бы один плюс в нём всегда будет. Это гарантирует нам n плюсов в таблице в целом.

7. По кругу расставлены $n \geqslant 10$ фишек, у каждой из которых одна сторона чёрная, а другая белая. В начале одна фишка лежит чёрной стороной вверх, а остальные — белой стороной вверх. Разрешается проделать следующую операцию: взять три любые фишки, лежащие подряд, первая из которых (считая по часовой стрелке) лежит чёрной стороной вверх, перевернуть вторую из них и переложить первую на место третьей, вторую на место первой и третью на место второй. Можно ли для любого непустого набора мест добиться того, чтобы чёрные сверху фишки лежали на всех этих местах и только на них?

Ответ: да.

Решение. Сначала сделаем все фишки черными. Для этого достаточно заметить, что пока после некоторой черной фишки A следует белая, можно сделать операцию (где фишка A будет первой), увеличивающую количество черных фишек. Далее будет исходить из того, что все фишки черные.

Разберём три случая: когда в искомой расстановке есть две черных фишки подряд, когда есть две белых фишки подряд, и когда черные и белые чередуются. Так мы рассмотрим все возможные расстановки.

Пусть в искомой расстановке есть две черных фишки подряд. Будем идти от них по часовой стрелке, и каждую белую фишку, которая нам нужна в итоговой расстановке, получать с помощью замены ЧЧЧ $\to$ БЧЧ. (Например, если последняя фишка должна быть белой, то эта замена затронет её и изначальные две черные фишки.)

Пусть теперь в искомой расстановке есть две белых фишки подряд. Так как хотя бы одна черная там тоже где-то есть, можно пройти от них по часовой стрелке и найти комбинацию ББЧ. Сначала построим прекурсор: расстановку, в которой эта комбинация заменена на ЧЧБ, а остальные фишки совпадают с искомой, — это мы может сделать по алгоритму для предыдущего случая. Далее заменим ЧЧБ $\to$ ББЧ нашей операцией.

Наконец, если нет двух подряд белых и двух подряд чёрных, то фишки в искомой расстановке должны чередоваться. Найдём в ней комбинацию ЧБЧ; опять, сначала по предыдущему пункту построим прекурсор, в котором эта комбинация заменена на ЧББ, а потом заменим ЧББ $\to$ ЧБЧ.

8. По кругу сидят 1000 девочек. Изначально у одной из них n монет, у остальных монет нет. За ход каждая девочка с по меньшей мере двумя монетами передаёт по одной монете каждой из двух соседок. Докажите, что:
(a) если $n < 1000$, то процесс прекратится.
(b) если $n = 1000$, то процесс не прекратится.

Решение (a). Пронумеруем монеты, чтобы их можно было считать разными. Будем закреплять монеты за парами соседних девочек так, чтобы закрепленная монета передавалась только в пределах пары.

Изначально все монеты незакреплены. Когда незакрепленная монета X передается от девочки A к девочке B, и за парой A—B монета ещё не закреплена, закрепим X за парой A—B. Далее, если одна из низ владеет монетой X и совершает операцию, то второй девочке из пары она передает именно X. Таким образом, X никогда не выйдет за пределы этой пары девочек.

Так как монет менее 1000, за некоторой парой девочек никогда не будет закреплена монета. Это означает, что эти две девочки никогда не совершают операцию.

Если предположить, что процесс не прекратится, то некоторая девочка совершит бесконечное число операций. Тогда её соседки получат от неё бесконечное число монет; значит, и сами они совершат бесконечное число операций. Продолжая идти по кругу, получим, что все девочки совершат бесконечное число операций. Это противоречит тому, что некоторые две девочки никогда не будут совершать операции.

(Решение можно было завершить и иначе: найдя двух соседок, не передающих друг другу монеты, мы фактически можем разорвать круг в цепочку. Тогда при описанных операциях сумма квадратов координат монет будет возрастать.)

Решение (b). Заметим, что расположение монет всегда останется симметрично относительно диаметра круга, проходящего через изначальную владелицу монет — назовём её Алисой. Отсюда нетрудно понять, что у Алисы всегда будет чётное число монет. Действительно, исходящие операции уменьшают её число монет на 2, а приходящие происходят одновременно справа и слева, то есть добавляют тоже 2.

Осталось заметить, что если у Алисы оказалось 0 монет и она не может сделать ход, то по принципу Дирихле у какой-то другой девочки хотя бы две монеты, и процесс всё равно продолжится.