

Графы

1. На рёбрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны. Докажите, что получившийся ориентированный граф сильно связан.
2. В некоторой стране есть $n > 3$ аэропортов и n авиакомпаний, выполняющих двусторонние рейсы. При этом каждая компания выполняет хотя бы один рейс, и каждая пара городов соединена рейсом ровно одной из авиакомпаний. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, состоящий из трёх рейсов, в котором никакие два рейса не выполняются одной и той же авиакомпанией.
3. Некоторые города Графландии соединены двусторонними авиарейсами компании «Графские авиалинии» так, что из любого города можно долететь до любого другого, возможно, с пересадками. Авиакомпания открыла новый рейс между двумя городами, и оказалось, что из любого города теперь можно долететь до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Какое наибольшее количество рейсов могло быть необходимо, чтобы добраться из одного города в другой до этого?
4. В городе на каждую площадь выходит не менее трёх улиц. На улицах введено одностороннее движение так, что можно проехать с любой площади на любую другую. Докажите, что можно запретить движение между двумя площадями так, что проезд сохранится.
5. В волейбольном однокруговом турнире приняло участие 25 команд. Назовём три команды «нестабильной тройкой», если каждая из команд выиграла у одной другой из этой тройки (то есть A выиграла у B , B у C , C у A). Какое наибольшее количество нестабильных троек могло получиться?