

## Серия 44. Разнобой по алгебре и ТЧ

1. Докажите, что при любом натуральном  $k$  число  $2^{3^k} + 1$  делится на  $3^{k+1}$ .
2. Дано натуральное  $n$ . Пусть  $d$  – делитель числа  $2n^2$ . Докажите, что  $n^2 + d$  не является точным квадратом.
3. Пусть  $1 < a \leq b \leq c$ . Докажите, что

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

4. Можно ли функцию  $f(x) = 2^x + 3^x + 9^x$  представить в виде суммы конечного числа вещественных периодических функций?
5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  со следующим свойством: наибольший простой делитель числа  $n^4 + n^2 + 1$  равен наибольшему простому делителю числа  $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$ .
6. В начале года эту задачу сдал только один человек. Назовём натуральное число  $N$  хорошим, если найдутся такое простое  $p$  и целые неотрицательные  $a, b, c$ , что  $N = \frac{p^a - p^b}{p^c - 1}$ . Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не являются хорошими.