

Серия 44. Разнобой по алгебре и ТЧ

1. Докажите, что при любом натуральном k число $2^{3^k} + 1$ делится на 3^{k+1} .
2. Дано натуральное n . Пусть d – делитель числа $2n^2$. Докажите, что $n^2 + d$ не является точным квадратом.
3. Пусть $1 < a \leq b \leq c$. Докажите, что

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

4. Можно ли функцию $f(x) = 2^x + 3^x + 9^x$ представить в виде суммы конечного числа вещественных периодических функций?
5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n со следующим свойством: наибольший простой делитель числа $n^4 + n^2 + 1$ равен наибольшему простому делителю числа $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$.
6. В начале года эту задачу сдал только один человек. Назовём натуральное число N хорошим, если найдутся такое простое p и целые неотрицательные a, b, c , что $N = \frac{p^a - p^b}{p^c - 1}$. Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не являются хорошими.