Серия 43. Игры

1. Есть куб. Первый красит три его ребра в красный цвет, потом второй красит еще три ребра в синий цвет, потом первый красит три ребра в красный, потом второй — оставшиеся три ребра в синий. Каждое ребро красить можно только один раз. Выигрывает тот, кому удалось покрасить в свой цвет ребра одной грани и не дать сделать того же сопернику. Кто выигрывает?

2. Двое по очереди пишут в клетках кубика $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \ldots, 24$ (каждое число один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Может ли первый ему помешать?

3. В концах полоски 1×101 сидят кузнечики, которые умеют прыгать на $1, 2, 3$ или 4 клетки. Каждый из них стремится попасть в противоположный конец полоски раньше соперника. Нельзя прыгать в клетку, где уже сидит кузнечик. Какой кузнечик выиграет?

4. На доске $n \times n$ двое по очереди ходят фишкой. Сначала она стояла в углу, ходить можно на соседнюю по стороне клетку, на которой фишка еще не была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что при чётном n выигрывает первый, а при нечетном — второй игрок.

5. Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, делящееся на 11. Кто из игроков победит при правильной игре?

6. На плоскости отмечены все точки с целыми координатами (x, y), удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 \leqslant 10^{10}$. Двое играют в игру (ходят по очереди). Первым ходом первый игрок ставит фишку в какую-то отмеченную точку и стирает её. Затем каждым очередным ходом игрок переносит фишку в какую-то другую отмеченную точку и стирает её. При этом длины ходов должны все время увеличиваться; кроме того, запрещено делать ход из точки в симметричную ей относительно центра $(0, 0)$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?