Серия 42. Многочлены

1. Коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$.

2. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I – неотрицательны. Докажите, что найдётся такая точка x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$.

3. **(a)** Даны три непостоянные линейные функции $p(x), q(x), r(x)$. Докажите, что хотя бы один из многочленов $pq + r, pr + q, qr + p$ имеет вещественный корень.
(b) Даны n непостоянных линейных функций $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$. Докажите, что не менее $n - 2$ из многочленов

$$p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + p_n, \quad p_1 p_2 \cdots p_{n-2} p_n + p_{n-1}, \quad \ldots, \quad p_2 p_3 \cdots p_n + p_1$$

имеют вещественный корень.

4. Найдите все n, для которых верно утверждение: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^l, где $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n$, что графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^l$ не будут иметь общих точек.

5. Многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, причём $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots. < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1, x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}, x_n]$.

6. На доске написано уравнение

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

– и в левой, и в правой части по 2016 линейных множителей. При каком наименьшем k можно стереть ровно k из этих 4032 множителей так, чтобы с каждой стороны остался хотя бы один множитель и получившееся уравнение не имело действительных корней?

7. Про приведённый многочлен $P(x) = x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $k \geqslant 2$ многочлен $\underbrace{P(P(\ldots P}_{k \text{ раз}}(x)\ldots))$ имеет действительные корни, причём только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причём только положительные?