Серия 41. Гамильтоновы пути и циклы

Простой путь или простой цикл, проходящий через все вершины графа ровно по одному разу, называется *гамильтоновым*.

1. (*Признак Дирака*) **(a)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $n/2$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.[1] **(b)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $(n-1)/2$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.

2. (*Признак Оре*) В графе на $n \geqslant 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше n. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл. **(a)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше $n-1$. Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.

3. Какое максимальное число рёбер может быть в графе с n вершинами, в котором нет гамильтонова пути?

4. Дан двудольный граф, по n вершин в каждой доле. Степень каждой вершины строго больше, чем $n/2$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.

Для графа G определим его *число независимости* $\alpha(G)$ как размер максимального подмножества его вершин, попарно несмежных друг с другом. Также обозначим через $\varkappa(G)$ минимальное число вершин, после удаления которых граф перестаёт быть связным.

5. (*Признак Хватала*) Связный граф G на $n \geqslant 3$ вершинах таков, что $\alpha(G) \leqslant \varkappa(G)$. Тогда в графе G есть гамильтонов цикл.
(a) Докажите, что в графе вообще есть хотя бы один простой цикл.
Пусть $x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{k-1} - x_k$ — вершины максимального простого цикла C в графе G; K — одна из компонент связности $G \setminus C$; N — множество соседей компоненты K в графе G;
(b) Докажите, что $N \subset C$, и что никакие две соседние вершины цикла C не лежат в N.
Пусть $M = \{x_{i+1} | x_i \in N\}$ — множество правых соседей вершин N в цикле.
(c) Докажите вершины подмножества M попарно несмежные.
(d) В предположении противного докажите, что $\varkappa(G) \leqslant |N| = |M| < \alpha(G)$, завершив доказательство признака Хватала.

6. Рассмотрим граф, вершинами которого являются трёхэлементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Ребрами соединим те пары вершин, соответствующие подмножества которых пересекаются ровно по одному элементу. Докажите, что в построенном графе есть гамильтонов цикл.

---

[1] В доказательстве от противного удобно работать с максимальным по числу рёбер графом-контрпримером при фикс. n.