

Матбой-3

1. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70-ю участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более чем с 10-ю участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.
2. Внутри выпуклого $2n$ -угольника отмечена точка. Её соединили прямыми со всеми $2n$ вершинами. Докажите, что существует сторона многоугольника, которую ни одна из этих $2n$ прямых не пересекла по внутренней точке.
3. Пусть a — вещественное число. Зададим последовательность x_1, x_2, \dots условиями $x_1 = 1$ и $ax_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$ при всех $n \geq 1$. Найдите наименьшее a , при котором все члены этой последовательности неотрицательны.
4. На сторонах AB, AC остроугольного неравностороннего треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что отражение прямой BC относительно прямой XY касается окружности (AXY) . Докажите, что окружность (AXY) касается окружности (BOC) , где точка O — центр окружности (ABC) .
5. Дано натуральное число $n \geq 2$, и пусть A_n — это множество

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}.$$

Определите наибольшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких элементов множества A_n (элементы множества A_n можно использовать в сумме по несколько раз).

6. Шахматная доска покрыта 32 домино (каждое домино покрывает ровно два поля). Докажите, что эти домино можно повернуть на 90° или на 180° (каждое — вокруг центра одной из закрываемых им клеток, поворачивать можно независимо друг от друга и в любую сторону), чтобы по-прежнему вся доска была покрыта.
7. Для любых неотрицательных чисел x, y, z с суммой 3 докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{1+2yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+2zx}} + \sqrt{\frac{z}{1+2xy}} \geq \sqrt{3}.$$

8. В ряд стоит 4039 блюдца, на них лежат 1, 2, 3, ..., 2019, 2020, 2019, 2018, ..., 2, 1 орехов. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с любого блюда на соседнее слева или съесть любое число орехов из самого левого блюда. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник?