Матбой-2

1. Компания из нескольких людей называется *связной*, если её нельзя разбить на две непустые группы так, что люди из разных групп будут не знакомы. В некоторой связной компании каждый знает ровно четверых, и четверо знакомых каждого человека образуют связную компанию. Докажите, что людей этой компании можно поставить по кругу так, чтобы любые два соседа были знакомы.

2. Множество точек в пространстве назовем *интересным*, если для любой плоскости вне неё находится хотя бы 100 точек этого множества. При каком наименьшем d можно утверждать наверняка, что любое интересное множество точек в пространстве содержит интересное подмножество не более чем с d точками?

3. Пусть a -— вещественное число. Зададим последовательность $x_1, x_2, \ldots$условиями $x_1 = 1$ и $ax_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$. Найдите наименьшее a, при котором все члены этой последовательности неотрицательны.

4. На сторонах AB, AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что отражение прямой BC относительно прямой XY касается окружности (AXY). Докажите, что окружность (AXY) касается окружности (BOC), где точка O — центр окружности (ABC).

5. Дано натуральное число $n \geqslant 2$, и пусть A_n — это множество

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\, 0 \leqslant k < n\}.$$

Определите наибольшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких элементов множества A_n (элементы множества A_n можно использовать в сумме по нескольку раз).

6. Шахматная доска покрыта 32 домино (каждое домино покрывает ровно два поля). Докажите, что эти домино можно повернуть на 90° или на 180° (каждое — вокруг центра одной из закрываемых им клеток, поворачивать можно независимо друг от друга и в любую сторону), чтобы по-прежнему вся доска была покрыта.

7. Для любых неотрицательных чисел x, y, z с суммой 3 докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{1+2yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+2zx}} + \sqrt{\frac{z}{1+2xy}} \geqslant \sqrt{3}.$$

8. В ряд стоит 4039 блюдец, на них лежат $1, 2, 3, \ldots, 2019, 2020, 2019, 2018, \ldots, 2, 1$ орехов. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с любого блюдца на соседнее слева или съесть любое число орехов из самого левого блюдца. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник?