Матбой-1

1. Компания из нескольких людей называется *связной*, если её нельзя разбить на две непустые группы так, что люди из разных групп будут не знакомы. В некоторой связной компании каждый знает ровно четверых, и четверо знакомых каждого человека образуют связную компанию. Докажите, что людей этой компании можно поставить по кругу так, чтобы любые два соседа были знакомы.

2. Множество точек в пространстве назовем *интересным*, если для любой плоскости вне неё находится хотя бы 100 точек этого множества. При каком наименьшем d можно утверждать наверняка, что любое интересное множество точек в пространстве содержит интересное подмножество не более чем с d точками?

3. Пусть a –— вещественное число. Зададим последовательность x_1, x_2, ...условиями $x_1 = 1$ и $ax_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$. Найдите наименьшее a, при котором все члены этой последовательности неотрицательны.

4. Биссектрисы AD, BE, CF треугольника ABC повторно пересекают окружность (ABC) в точках D', E', F' соответственно. Окружности (AEE') и (AFF') пересекаются в точках A и X; окружности (BFF') и (BDD') пересекаются в точках B и Y; окружности (CDD') и (CEE') пересекаются в точках C и Z. Докажите, что прямые AX, BY, CZ пересекаются в одной точке, лежащей на прямой Эйлера треугольника ABC.

5. Для натурального n и простого p обозначим через $\nu_p(n)$ степень вхождения простого множителя p в разложение числа n на простые множители. Даны натуральное число d и различные простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Докажите, что найдутся бесконечно много натуральных значений n таких, что $v_{p_i}(n!)$ делится на d при всех $1 \leqslant i \leqslant k$.

6. Шахматная доска покрыта 32 домино (каждое домино покрывает ровно два поля). Докажите, что эти домино можно повернуть на 90° или на 180° (каждое — вокруг центра одной из закрываемых им клеток, поворачивать можно независимо друг от друга и в любую сторону), чтобы по-прежнему вся доска была покрыта.

7. Для любых неотрицательных чисел x, y, z с суммой 3 докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{1+2yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+2zx}} + \sqrt{\frac{z}{1+2xy}} \geqslant \sqrt{3}.$$

8. В узлах правильного шестиугольника со стороной 3, разбитого на правильные треугольники со стороной 1 (см. рисунок) расставили натуральные числа от 1 до 37. Будем называть треугольник *хорошим*, если направление обхода его вершин от меньшего числа к большему по часовой стрелке. Докажите, что при любой расстановке хороших треугольников не меньше 19.