

## Графы (подсказки)

4. В городе на каждую площадь выходит не менее трёх улиц. На улицах введено одностороннее движение так, что можно проехать с любой площади на любую другую. Докажите, что можно запретить движение между двумя площадями так, что проезд сохранится.

**Подсказка.** Выделим какой-нибудь цикл (он существует т.к. граф сильно связан), тогда внутри данного больше нет рёбер, иначе это ребро можно удалить. В цикле все вершины степени 2, а по условию степень каждой вершина не менее 3. значит есть исходящее ребро в вершину вне цикла.

А далее нужно запустить некоторый процесс первый шаг которого был описан.

5. В волейбольном однокруговом турнире приняло участие 25 команд. Назовём три команды «нестабильной тройкой», если каждая из команд выиграла у одной другой из этой тройки (то есть  $A$  выиграла у  $B$ ,  $B$  у  $C$ ,  $C$  у  $A$ ). Какое наибольшее количество нестабильных троек могло получиться?

**Подсказка.** Все тройки вершин либо «нестабильные» (цикл), либо «стабильные» (транзитивные). Тогда вместо максимизации «нестабильные», проще минимизировать «стабильные».

- 
1. На научный конгресс приехали  $2n$  участников, каждый из которых имеет среди других участников ровно  $n - 1$  знакомых. При каких  $n$  всех участников можно гарантированно разбить на пары так, чтобы в каждой паре были знакомые между собой люди?

**Подсказка.** Можно выделить максимальное паросочетание или путь наибольшей длины и посмотреть как устроен наш граф.

При нечётном  $n$  очевидный контрпример с двумя кликами на  $n$  вершинах.

2. Рёбра полного графа раскрашены в три цвета, причём между любыми двумя вершинами есть пути каждого цвета. Докажите, что найдётся треугольник, рёбра которого разноцветны.

**Подсказка.** Если удалить вершину и выделить компоненты красной связности после удаления, то между любой парой этих компонент все рёбра должны быть одного цвета.

3. Докажите, что можно расставить по кругу 512 нулей и 512 единиц с условием, чтобы при обходе круга по часовой стрелке все последовательности из десяти подряд идущих чисел были различными.

**Подсказка.** *Идея первого решения.* Можно построить граф, где вершинами будут всевозможные последовательности из 10 цифр и они будут соединены ориентированным ребром, если суффикс (последние 9 цифр) первой последовательности, совпадает с префиксом (первые 9 цифр) второй последовательности. Тогда понятно, что входящая и ис-

ходящая степени каждой вершины будут равны 2 и надо доказать, что существует Гамильтонов цикл.

*Идея второго решения.* Построить такой граф, чтобы всевозможные последовательности из 10 цифр являлись рёбрами и у двух последовательных рёбер совпадали суффикс и префикс из 9 цифр. В таком графе нужно будет найти Эйлеров цикл.

*Бывают решения и без графов. Оказывается, работает такое: будем писать символы в строку по одному. Начнём с десяти нулей, а дальше будем стараться писать нули, а если нуль нельзя, то единичку.*