

Геометрия-2, дополнительные задачи

5. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На лучах-медианах из вершин A и B отметили такие точки P и Q соответственно, что $\angle APC = \angle CAB$ и $\angle BQC = \angle CBA$. Докажите, что $\angle AQB + \angle APB = 180^\circ$.

Нужно понять смысл P и Q , о чём нам эти равенства условий на самом деле говорят. Для этого полезно провести прямую медиану. Также переложить равные углы поможет инверсия.

6. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром в точке O , пересекаются в точке R . Некоторая окружность с центром в точке O пересекает отрезки AR , BR , CR , DR в точках A' , B' , C' , D' соответственно. Прямые $A'B'$ и $C'D'$ пересекают стороны BC и DA в точках K , L , M , N . Докажите, что точки K , L , M , N лежат на одной окружности с центром в точке O .

Поискать к форму разные решения:

1. Все три окружности должны быть элементами одного и того же пучка.
2. Рассмотрите середины хорд.

7. В остроугольном треугольнике ABC отметили ортоцентр H . Биссектриса угла BHC пересекает сторону BC в точке D . Точки E и F симметричны точке D относительно сторон AB и AC соответственно. Докажите, что окружность (AEF) проходит через середину дуги BAC описанной окружности треугольника ABC .

Обозначим середину дуги BAC через K . Виспо того, чтобы следить за направлениями прямых EM и FN , можно наоборот отразить точку K относительно двух сторон и соединить эти точки с точкой D . Стоп, точку отражают относительно сторон треугольника, где-то я такое уже видел...

8. Точки A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон треугольника ABC . На отрезках BA_1 , CA_1 отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX = CY$. Окружность (AXY) вторично пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через K , M , N точки пересечения пар лучей PX и QY , PX и B_1A_1 , QY и C_1A_1 соответственно. Докажите, что окружность (KMN) касается окружности (AXY) .

В решении задачи достаточно много ходов. Можно начать с того, чтобы угадать точку касания. В этом помогает движение точек или прослеживание двойных отношений. Остальные ходы — поиск скрытых утверждений и их доказательство счётом углов. Возможно, придётся достроить некоторые дополнительные точки