Геометрия-1

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) отмечены середины X и Y сторон AB и BC соответственно. Точка Z — основание перпендикуляра из вершины A на прямую CX. Докажите, что центр окружности (XYZ) лежит на прямой BC.

2. Вписанная окружность треугольника ABC имеет центр в точке I и касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. На прямой EF отмечены точки K и L так, что $BK = CK$ и $DL \parallel AI$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки B, C, K, L.

3. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечены точки X, Y, Z соответственно так, что $\angle BXY = \angle ZXC$. Прямая, параллельная прямой YZ, проходящая через вершину B, пересекает отрезок XY в точке T. Докажите, что прямая AT — биссектриса угла BAC.

4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < AC$) точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Прямая ℓ касается окружности (ABC) в точке A. Прямая, проходящая через середину K отрезка AH и перпендикулярная прямой OK, пересекает сторону AB, прямую ℓ и прямую BC в точках X, T и Z соответственно.
(a) Докажите, что $\angle XOT = \angle AOB$.
(b) Докажите, что $ZH \parallel \ell$.

5. В треугольнике ABC отмечен инцентр I. Прямая AI пересекает сторону BC и окружность (ABC) второй раз в точках L и N соответственно. Точка X — отражение точки I относительно прямой, соединяющей инцентры треугольников LNB и LNC. Докажите, что $\angle BXC = 90°$.

6. В треугольнике ABC на стороне BC удалось отметить такие точки X и Y, что $BX = BA$, $CY = CA$. Прямая, проведённая через инцентр I треугольника ABC перпендикулярно прямой AI, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Окружности (APX) и (AQY) пересекаются в точках A и T. Докажите, что центр окружности (ATI) лежит на прямой BC.