Геометрия-1 (подсказки)

5. В треугольнике ABC отмечен инцентр I. Прямая AI пересекает сторону BC и окружность (ABC) второй раз в точках L и N соответственно. Точка X — отражение точки I относительно прямой, соединяющей инцентры треугольников LNB и LNC. Докажите, что $\angle BXC = 90^\circ$.

Для решения задачи достаточно использовать лемму о трезубце, заметить несколько симметрий и посчитать уголки.

Во некоторых решениях ещё помогает следующий известный факт.

В треугольнике ABC проведена чевиана AD и в треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрам I и J. Тогда угол IDJ — прямой, где D — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. И вообще вторая общая внутренняя касательная к этим окружностям проходит через точку D.

6. В треугольнике ABC на стороне BC удалось отметить такие точки X и Y, что $BX = BA$, $CY = CA$. Прямая, проведённая через инцентр I треугольника ABC перпендикулярно прямой AI, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Окружности (APX) и (AQY) пересекаются в точках A и T. Докажите, что центр окружности (ATI) лежит на прямой BC.

Во-первых, в задаче можно сделать инверсию в точке A и решить. Получится факт про вневписанную окружность. Этот факт в особенности очевиден для вписанной окружности.

Но можно и без инверсии. Достаточно отметить середины отрезков AP и AQ и определить центры окружностей как точки пересечения серперов. Получится утверждение вообще без окружностей, которое можно проверить теоремой Менелая или чем-нибудь проективным.

7. В треугольнике ABC точка N — середина дуги BAC описанной окружности. Из точки N проведены касательные NP и NQ к вписанной окружности (P и Q точки касания). Прямые AP и AQ пересекают второй раз описанную окружность треугольника в точках X и Y соответственно. Докажите, что $PX = QY$.

Промежуточное утверждение – прямые AP и AQ изогонали в угле BAC. На него довольно быстро натыкаешься обратным анализом. Но как оно может доказаться?

8. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ таков, что в него можно вписать окружность и вокруг него можно описать окружность. Пусть ω_A, ω_B, ω_C, ω_D, ω_E и ω_F — окружности, вписанные в треугольники FAB, ABC, BCD, CDE, DEF и EFA соответственно. Обозначим общую внешнюю касательную к окружностям ω_A и ω_B, отличную от прямой AB, через ℓ_{AB}. Аналогично определим прямые ℓ_{BC}, ℓ_{CD}, ℓ_{DE}, ℓ_{EF} и ℓ_{FA}. Пусть A_1 — точка пересечения прямых ℓ_{AB} и ℓ_{FA}; B_1 — точка пересечения прямых ℓ_{BC} и ℓ_{AB}; точки C_1, D_1, E_1 и F_1 определяются аналогично.

Известно, что $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — выпуклый шестиугольник. Докажите, что его диагонали A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 пересекаются в одной точке.

Классическое решение этой задачи состоит из двух частей, каждая из которых – скрытое свойство шестиугольника внутреннего шестиугольника. Поищите их. Лучше не думать о теореме Понселе — это бездонная пропасть в этой задаче.