Процессовая ТЧ. Решения

1. Автомат хранит в памяти натуральное число, изначально не делящееся на пять. Каждую минуту он прибавляет к текущему числу его последнюю цифру. Как только в результате получится степень двойки, автомат выходит из строя. Докажите, что рано или поздно он выйдет из строя.

Решение. Сразу заметим, что наше число никогда не будет делиться на пять. Можно считать последняя цифра числа чётна (иначе после первой же операции она станет чётной). Тогда последовательность последних цифр числа зациклится с периодом ($2 \to 4 \to 8 \to 6$). При прохождении полного периода число увеличивается на 20.

Пусть в какой-то момент мы имеем число x, делящееся на 4 (такой момент будет: в какой-то момент мы будем прибавлять двойку, а из двух чётных чисел с разностью 2 хотя бы одно делится на 4). Выберем степень двойки 2^k ($k \geqslant 2$), большую чем x и оканчивающуюся на ту же цифру, что и x (это можно сделать, так как последовательность последних цифр степеней двоек тоже имеет период ($2 \to 4 \to 8 \to 6$)). Тогда $2^k - x$ делится на 10 и на 4, а значит, делится и на 20. Следовательно, в некоторый момент наше число станет равным 2^k.

2. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7?

Ответ: не может.

Решение. Выясним, как ведёт себя при нашей операции остаток по модулю 7. Пусть до операции было число $10A+B$, где B – последняя цифра. Тогда после операции будет число $A+5B$. Видим, что $A+5B \equiv 50A+5B \equiv 5(10A+B) \pmod 7$. То есть при нашей операции остаток по модулю 7 умножается на 5. В частности, если исходное число делилось на 7, то и после нескольких применений операции оно будет делится на 7. Но 7^{1998} делится на 7, а 1998^7 – нет. Противоречие.

3. К числу можно применить одну из двух операций: либо увеличить число на 1, либо возвести число в квадрат. Изначально даны числа 57 и 179. Можно ли из них за одинаковое количество операций получить равные числа?

Ответ: нельзя.

Решение. Допустим, что можно. Будем считать, что мы проводим операции с двумя числами параллельно. Возьмём первый момент, когда числа стали равными. Тогда на последнем шаге операции были различны. То число, которое последней операцией возводилось в квадрат, назовём *первым*, а то, к которому прибавлялась единичка – *вторым*. Пусть после последней операции наши числа стали равны x^2.

Допустим, что второе число хотя бы раз возводилось в квадрат. Тогда после последнего возведения в квадрат оно было не больше $(x-1)^2$. Значит, к нему в конце прибавлялась единичка хотя бы $2x - 1$ раз. Но первое число менялось не более $x - 56$ раз (так как оно перед последней операцией было равно x, а каждая операция увеличивала его хотя бы на 1). Но оба числа менялись одинаковое число раз, откуда $x - 56 > 2x - 1 \Rightarrow x < -55$. Противоречие.

Допустим, что второе число ни разу не возводилось в квадрат. Тогда первое число хотя бы раз было возведено в квадрат (иначе числа не сравнялись бы). Но в первый же момент, когда первое число будет возведено в квадрат, оно станет больше второго числа (так как $57^2 > 179 + 1$, а значит, $(57 + k)^2 > 179 + k + 1$ при любом натуральном k). Дальше первое число будет всё время оставаться больше второго, противоречие.

4. В цехе находятся 40 чанов с расплавленным оловом. Температуры олова в разных чанах могут быть различны. Также дано натуральное число k. Можно проводить операции следующего вида: выбрать набор из не более, чем k чанов, смешать их содержимое и разлить обратно по чанам (в результате значение температуры олова во всех чанах, участвующих в операции, станет равным среднему арифметическому значений температур в этих чанах до операции). При каком наименьшем k можно уравнять все 40 температур вне зависимости от их изначальных значений?

Ответ: 5.

Решение. Докажем, что для n чанов наименьшее возможное k равно наибольшему простому делителю p числа n.

Допустим, что $k < p$. Пусть изначально все температуры имели целые значения. Тогда есть такой инвариант: все значения температур рациональны, причём все знаменатели в несократимой записи дроби не делятся на p. (В самом деле, эти условия сохраняются при сложении дробей и при делении на число, меньшее p.) Пусть исходно сумма температур не делилась на p (скажем, одна из температур равнялась 1, а все остальные равнялись 0). Тогда после уравнивания все температуры должны выражаться несократимой дробью со знаменателем, кратным p. Значит, в этом примере уравнять нельзя.

Докажем теперь, при при $k = p$ всегда можно уравнять n. всегда уравнять. Для этого достаточно доказать, что если можно уравнять a температур и можно уравнять b температур, то можно уравнять и ab температур. Но это действительно так: ab температур можно разбить на a групп по b штук и уравнять в группах, а затем переразбить на b одинаковых групп по a штук и снова уравнять в группах.

5. Собственным делителем числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом а разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

Ответ: не верно.

Решение. Докажем, что наибольший простой делитель числа при наших операциях не уменьшается.

Наибольший собственный делитель составного числа n делится на его наибольший простой делитель p (можно разобрать отдельно случай n, равного степени числа p, и случай n, не равного степени числа p). Также заметим, что разделить на наименьший собственный делитель – это то же самое, что взять наибольший собственный делитель. Таким образом, результаты применения к n обеих операций делятся на p, и наибольший простой делитель не уменьшился.

Таким образом, если исходное число составное и имеет простой делитель, больший 2011, то 2011 будет получить нельзя.

Замечание. Числа, получаемые из n, вовсе не обязательно будут делиться на p вечно: наибольший простой делитель не уменьшается, но может увеличиваться.