Процессовая ТЧ. Добавка (Решения)

1. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т.д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

Решение 1. Для текущей пары чисел на доске будем записывать в блокнот пару чисел, обратных к числам на доске. Тогда после нашей операции из блокнота сотрётся меньшее число и вместо него будет написана разность большего и меньшего. Исходно в блокноте были записаны числа $1/a$ и $1/b$ – эти числа являются целыми кратными числа $1/ab$, а именно, $1/a = b \cdot (1/ab)$, $1/b = a \cdot (1/ab)$. Тогда по устройству алгоритма Евклида в какой-то момент в блокноте будет два числа, равных $\text{НОД}(a, b)/ab$. На доске в этот момент будут два равных целых числа (а именно, $\text{НОК}(a, b)$).

Решение 2. Если оба исходных числа умножить на константу c, то и все последующие числа умножатся на константу c. Значит, достаточно доказать утверждение задачи только в том случае, когда a и b взаимно просты.

Докажем индукцией по $a+b$ даже более сильное утверждение: если a и b взаимно просты, то в какой-то момент на доске возникнет пара (ab, ab).

База $a + b = 2$ очевидна.

Переход. Не умаляя общности, $a > b$. После первой операции получим пару $(a, \frac{ab}{a-b})$. Умножим оба числа в этой паре на $\frac{a-b}{a}$, получим пару $(a-b, b)$. Числа в этой паре взаимно просты и их сумма меньше $a + b$. Значит, можем применить предположение индукции: процесс с началом в паре $(a-b, b)$ придёт к паре одинаковых чисел, равных $(a-b)b$. Тогда процесс с началом в $(a, \frac{ab}{a-b})$ придёт к паре одинаковых чисел, равных $(a-b)b \cdot \frac{a}{a-b} = ab$, что и требовалось.

2. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета – чёрный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были чёрными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

Решение. Заметим, что если у чисел совпадают множества простых делителей, то эти числа всегда перекрашиваются одновременно. Поэтому мы можем считать, что мы рассматриваем не числа, а множества простых чисел. Такое множество соответствует какому-нибудь числу от 1 до 1000000 тогда и только тогда, когда произведение всех элементов этого множества не превосходит 1000000. Такие множества простых чисел назовём *хорошими*.

Лемма. Рассмотрим хорошее множество простых чисел $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Тогда можно сделать несколько операций так, чтобы поменяли цвет те и только те множества, которые содержат A.

Доказательство. Применим по одному разу операцию для каждого подмножества A (в том числе для самого A и пустого множества). Все подмножества A сами являются хорошими множествами, поэтому так можно сделать. Пусть B – какое-то множество простых чисел, и пусть k – это мощность пересечения $A \cap B$. Множество B не поменяет цвет ровно для тех операций, которые соответствуют подмножествам в A, не пересекающимся с B. Таких подмножеств ровно 2^{n-k} штук. Значит, B поменяет цвет $2^n - 2^{n-k}$ раз. Это число нечётно $\iff k = n \iff B$ содержит A. □

Первая концовка решения Докажем, что мы можем получить вообще любую наперёд заданную раскраску хороших множеств. Сначала перекрасим, если нужно, пустое множество. Дальше на n-м шагу мы будем по одному перекрашивать n - элементные множества, которые требуется перекрасить, не меняя при этом цвет множеств мощности меньше n и цвет других множеств мощности n. Это возможно в силу леммы. Через несколько таких шагом мы получим нужную раскраску.

Вторая концовка решения. Рассмотрим всевозможные непустые хорошие множества. Для каждого применим набор операций, удовлетворяющий утверждению леммы. Тогда каждое хорошее множество мощности k ($k \geqslant 1$) будет перекрашено ровно $2^k - 1$ раз (по разу для каждого своего непустого подмножества), т.е. нечётное число раз. Таким образом, все числа, кроме единички, поменяли цвет. Единичку можем просто перекрасить отдельно.

3. Изначально на доске написано натуральное число N. В любой момент Миша может выбрать число $a > 1$ на доске, стереть его и дописать все натуральные делители a, кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано N^2 чисел. При каких N это могло случиться?

Ответ: только при $N = 1$.

Решение. Очевидно, что $N = 1$ подходит. Докажем, что при $N > 1$ количество чисел на доске всегда будет строго меньше, чем N^2. Для этого достаточно, чтобы сумма квадратов всех чисел на доске с каждой операцией строго уменьшалась. То есть достаточно доказать, что для любого натурального числа n сумма квадратов всех его делителей, кроме самого n, меньше n^2. Что мы сейчас и сделаем.

Обозначим делители числа n, кроме него самого, через $d_1, d_2, \dots, d_k$. Поделим на n^2 обе части неравенства $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2 < n^2$, которое мы хотим доказать. В правой части будет 1, а сумма в левой части будет равна $1/d_2^2 + 1/d_3^2 + \dots + 1/d_k^2 + 1/n^2$. Значит,

$$\text{Левая часть} \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 = \text{Правая часть.}$$

Требуемое неравенство доказано.

Замечание. По факту нужно было доказать, что бесконечный ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ сходится к числу, не большему 2. На самом деле известно, что этот ряд сходится к $\frac{\pi^2}{6}$.