Процессовая ТЧ. Подсказки (задача 4 + добавка)

4. В цехе находятся 40 чанов с расплавленным оловом. Температуры олова в разных чанах могут быть различны. Также дано натуральное число k. Можно проводить операции следующего вида: выбрать набор из не более, чем k чанов, смешать их содержимое и разлить обратно по чанам (в результате значение температуры олова во всех чанах, участвующих в операции, станет равным среднему арифметическому значений температур в этих чанах до операции). При каком наименьшем k можно уравнять все 40 температур вне зависимости от их изначальных значений?

Подсказка. Число 40 делится на 5. Поэтому в некоторых случаях для уравнивания всех температур нужно уметь делить на пять.

---

1. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т.д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

Подсказка. Посмотрите, что происходит с числами, обратными к числам на доске.

2. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета – чёрный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были чёрными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

Подсказка. Рассмотрим набор простых чисел $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Придумайте, как сделать так, чтобы поменяли цвет те и только те числа, которые делятся на все простые числа из набора.

Назовём два числа *эквивалентными*, если у них совпадают наборы простых делителей. Заметим, что эквивалентные числа всегда перекрашиваются одновременно. Возможно, думать про задачу будет проще, если вместо чисел рассматривать классы эквивалентности.

3. Изначально на доске написано натуральное число N. В любой момент Миша может выбрать число $a > 1$ на доске, стереть его и дописать все натуральные делители a, кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано N^2 чисел. При каких N это могло случиться?

Подсказка. На самом деле при $N > 1$ количество чисел на доске всегда будет строго меньше, чем N^2. Чтобы это доказать, надо придумать хороший полуинвариант.