Процессы (решения)

1. В вершинах единичного квадрата сидят три кузнечика. Они могут передвигаться так: кузнечик перепрыгивает через любого из двух остальных, перелетая его на расстояние, на которое он до него прыгал. Могут ли через какое-то время кузнечики оказаться в вершинах квадрата со стороной 2?

Ответ: нет.

Решение. Рассмотрим квадратную решетку на плоскости, для которой исходный квадрат кузнечиков является «клеткой». Покрасим вершины этого квадрата в четыре цвета, и распространим эту раскраску на остальные узлы решетки параллельными переносами на векторы с четными координатами.

Заметим теперь, что для каждого кузнечика четность координат на решетке является инвариантом (прыжки происходят на четные векторы), а значит, он не меняет цвет узла, на котором находится. Так как любой квадрат 2×2 на решетке имеет четыре одноцветных вершины, принять такое положение кузнечикам не удастся.

Другое решение. Рассмотрим трех кузнечиков и докажем, что они не смогут выстроится во вдвое больший равнобедренный прямоугольный треугольник, чем изначально. Для этого заметим, что площадь треугольника из трех кузнечиков остается неизменной при наших операциях.

Еще решение. Заметим, что кузнечики остаются на квадратной решетке, построенной на исходном квадрате. Также заметим, что прыжки кузнечиков обратимы. Если бы кузнечики могли образовать вдвое больший квадрат, то обратными операциями они могли бы образовать и вдвое меньший. Но это, очевидно, невозможно, так как вдвое меньший квадрат не поместится на исходную решетку.

2. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

Решение. Легко видеть, что если в кучке максимальное количество конфет (среди всех кучек в данный момент), то добавить в нее конфету мы никак не сможем. Это означает, что максимум количества конфет в кучках никогда не увеличивается.

С другой стороны, общее количество конфет постоянно растет. Так как оно ограничено величиной $100M$, где M — изначальный максимум количества конфет в кучках, то процесс не может продолжаться бесконечно.

3. В каждой клетке доски 8×8 нарисована стрелка (вверх, вниз, вправо или влево). Фишка ставиться на произвольную клетку. Каждым ходом фишка сдвигается на соседнюю клетку в направлении стрелки, а сама стрелка поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что фишка рано или поздно свалится с доски.

Решение. Предположим, что фишка ходила по полу бесконечное число ходов. Тогда в некоторой клетке она побывала бесконечное число раз. Тогда каждый четвертый раз (т. е. опять-таки бесконечное число) мы переходили в соседнюю справа клетку. Аналогично получим, что мы побывали бесконечное число раз в следующей справа клетке, и т. д., пока не придем к краю доски. Свалиться с края доски бесконечное число раз фишка не могла, противоречие.

4. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Ваня вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет ее в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Ваня.

Решение. Ясно, что если Ваня не может совершить действие, то все карты уже лежат рубашкой вверх. Предположим, что этого не произошло, и Ване удалось провернуть бесконечное количество действий.

Пронумеруем позиции карт в колоде сверху вниз (сами карты перемещаются по колоде и меняют позиции). Рассмотрим наименьший номер позиции, которая участвовала в вынимаемых пачках бесконечное число раз (такая найдется, очевидно); обозначим этот номер за X. Все позиции меньше X участвовали в конечном числе операций; рассмотрим момент после всех этих операций.

Легко видеть, что карта на позиции X в любом действии с ней должна оказаться верхней в пачке; но после первой же такой операции карта в этой позиции будет повернута рубашкой вверх, и дальнейшие операции с этой позицией будут невозможны. Противоречие.

Другое решение. Сопоставим текущему состоянию колоды двоичную запись числа: карты рубашкой вверх будут 1, а рубашкой вниз — 0, причем карты сверху соответствуют старшим разрядам, а снизу — младшим. Легко видеть, что это число возрастает с каждой операцией: меняться могут только разряды, соответствующие вынутой пачке, и самый старший из них изменяется с 0 на 1.

Так как число не может превзойти $11\ldots1_2$, то операции закончатся; это может произойти только если все карты лежат рубашкой вверх.

5. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено в черный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число клетчатых квадратов так, что будут выполняться два условия: 1) все черные клетки лежат в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади K.

Решение. Рассмотрим сначала квадрат размера $2^n \times 2^n$ для такого достаточно большого n, чтобы, во-первых, все N клеток в него поместились, а во-вторых, занимали в нём не более $4/5$ площади.

Далее запустим процесс: будем измельчать имеющиеся квадраты так, чтобы их стороны оставались степенями двойки, до тех пор, пока они не станут удовлетворять условию. При этом на всём протяжении процесса закрашенные клетки будут в каждом квадрате, но занимать будут не более $4/5$ его площади.

Действительно, рассмотрим некоторый квадрат $2^k \times 2^k$, который содержит закрашенные клетки. Если они занимают не менее $1/5$ его площади, *зафиксируем* его и не будем далее рассматривать; он войдет в итоговое вырезание. Иначе разобьем его на четыре квадрата $2^{k-1} \times 2^{k-1}$; оставим только те из них, в которых оказалась хотя бы одна закрашенная клетка. Так как площадь каждого из них в четыре раза меньше исходного, то оказавшиеся в них закрашенные клетки не могут занять более чем $4/5$ от их площади.

Ясно, что процесс измельчения квадратов закончится; когда это произойдет, все квадраты будут зафиксированы, и каждая закрашенная клетка будет лежать в некотором квадрате.