Целочисленные последовательности.

1. Про бесконечную последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел известно, что все натуральные числа в ней встречаются и при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено $a_n \geqslant n + (-1)^n$. Найдите эту последовательность.

2. Про последовательность натуральных чисел a_i известно, что НОД$(a_i, a_j) =$ НОД(i, j) для любых $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

3. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечётно, и $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, если a_n чётно. Докажите, что при любом нечётном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

4. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа без единицы так, что только конечное их число будет больше своего номера?

5. Дана сюръективная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (т.е. для любого $y \in \mathbb{N}$ найдётся такое $x \in \mathbb{N}$, что $f(x) = y$). Известно, что $m \vdots n \Leftrightarrow f(m) \vdots f(n)$. Чему может быть равно $f(13)$?

6. Существует ли такая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $f(f(n)) = 2n$ для всех $n \in \mathbb{N}$?