Целочисленные последовательности (решения)

1. Про бесконечную последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел известно, что все натуральные числа в ней встречаются и при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено $a_n \geqslant n + (-1)^n$. Найдите эту последовательность.

Ответ: $a_n = n + (-1)^n$.

Решение. Ясно, что $a_{2n} \geqslant 2n + 1$ и $a_{2n+1} \geqslant 2n$.

В исходной последовательности a_n поменяем местами a_2 и a_3, a_4 и a_5, $\ldots$, a_{2n} и a_{2n+1}, $\ldots$ Получится последовательность b_n с ограничением $b_n \geqslant n$, содержащая все натуральные числа.

Значит, вне её любого префикса $b_1, \ldots, b_k$ все элементы больше k. Тогда значения от 1 до k принимаются именно на этом префиксе, и так для любого k. Из этого следует, что $b_i = i$ для всех i.

Таким образом, исходная последовательность a_n имела вид $1, 3, 2, 5, 4, 7, 6 \ldots$

2. Про последовательность натуральных чисел a_i известно, что НОД$(a_i, a_j) =$ НОД(i, j) для любых $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Решение. Будем НОД чисел x и y обозначать через (x, y).

Наблюдение: при всех k число a_k делится на k.
Действительно: по условию $(a_k, a_{2k}) = (k, 2k) = k$. Значит, $a_k \vdots k$.

Теперь докажем, что $a_i = i$ при всех i. По наблюдению имеем $a_i = mi$ для некоторого натурального m. Получаем $(a_i, a_{mi}) = mi$, так как по наблюдению число a_{mi} делится на mi. Но по условию задачи $(a_i, a_{mi}) = (i, mi) = i$. Значит, $mi = i \Longrightarrow m = 1 \Longrightarrow a_i = i$, ЧТД.

Замечание. это та же идея, что распространена в функциональных уравнениях: подставь что-нибудь и посмотри, что получится. Впрочем, эта задача по сути и есть функциональное уравнение: ведь последовательность с натуральным числами – это то же самое, что и функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

3. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечётно, и $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, если a_n чётно. Докажите, что при любом нечётном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

Решение. Ясно, что в последовательности бесконечно много нечётных членов (так как натуральное можно поделить на 2 лишь ограниченное число раз).

Утверждение. Если a_i нечётно и больше пяти, то следующий нечётный член последовательности больше, чем a_i.

Применяя утверждение к a_0 и далее к последующим нечётным членам, получаем утверждение задачи.

Доказательство утверждения. Квадрат любого нечётного числа даёт остаток 1 по модулю 8. Значит, $a_i^2 - 5$ делится на 4, но $a_i^2 - 5$ не делится на 8. Значит, $a_{i+3} = (a_i^2 - 5)/4$, и a_{i+3} является следующим нечётным членом после a_i. Распишем $a_{i+3} = (a_i^2 - 5)/4 > a_i \iff (a_i - 5)(a_i + 1) > 0$, что верно при $a_i > 5$. Утверждение доказано.

4. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа без единицы так, что только конечное их число будет больше своего номера?

Ответ: нельзя

Решение 1. Допустим, что так выписать можно. Пусть f – функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}\backslash\{1\}$, которая числу n ставит в соответствие n-е число ряда. Из условия задачи функция f инъективна (напомним, *инъективноситъ* означает, что из $f(x) = f(y)$ следует $x = y$). Через b_n обозначим $\underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ раз}}(1)\ldots))$.

Утверждение. Все числа b_n различны.

Доказательство утверждения. Если для некоторых $i \neq j$ $b_i = b_j$, то тогда и $b_{i+1} = f(b_i) = f(b_j) = b_{j+1}$. Значит, последовательность $\{b_n\}$ периодична. Так как f инъективна, то из $b_i = b_j$ $(i, j \geqslant 2)$ следует $b_{i-1} = b_{j-1}$. Следовательно, последовательность $\{b_n\}$ периодична без предпериода. Таким образом, при каком-то $n > 0$ будет $b_n = b_0 = 1$. Но 1 не может являться значением функции f, и в то же время $b_n = f(b_{n-1}) = 1$. Противоречие, утверждение доказано.

Из утверждения следует, что найдется бесконечно много натуральных i, для которых $b_{i+1} > b_i$, так как иначе последовательность $\{b_i\}$ с некоторого момент строго убывала, но для последовательности натуральных чисел такое невозможно. Неравенство $b_i > b_{i-1}$ означает, что число ряда с номером b_i больше своего номера. Таким образом, мы нашли бесконечно много чисел в ряду, больших своего номера, противоречие.

Решение 2. Допустим, что выписать можно. Обозначим i-е число в ряду через a_i. Тогда найдётся такое N, что при всех $i > N \quad a_i \leqslant i$. Пусть $M = \max(a_1, a_2, \ldots, a_N, N)$.

Обратим внимание, что при любом $i \leqslant M$ выполнено $a_i \leqslant M$.
В самом деле: если $i \leqslant N$, то это верно по определению M, а если $i > N$, то это верно в силу $a_i \leqslant i \leqslant M$.

Таким образом, $a_1, a_2, \ldots, a_M$ – это M различных натуральных чисел, каждое из которых не меньше 2 и не больше M. Это даёт противоречие.

5. Дана сюръективная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (т.е. для любого $y \in \mathbb{N}$ найдётся такое $x \in \mathbb{N}$, что $f(x) = y$). Известно, что $m \vdots n \Leftrightarrow f(m) \vdots f(n)$. Чему может быть равно $f(13)$?

Ответ. Любому простому числу.

Решение.

Утверждение 1. $f(1) = 1$.

Доказательство утверждения 1. В силу сюръективности f найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $f(n) = 1$. Достаточно доказать, что $n = 1$. Так как $f(1) \vdots f(n)$ (любое натуральное число делится на 1), то по условию $1 \vdots n$. Значит, $n = 1$.

Утверждение 2. Если p – простое, то $f(p)$ – тоже простое.

Доказательство утверждения 2. От противного, пусть d – делитель числа $f(p)$. Хотим доказать, что тогда либо $d = 1$, либо $d = f(p)$. В силу сюръективности f найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $f(n) = d$. Так как $f(p) \vdots f(n)$, то по условию $p \vdots n$. Но тогда либо $n = 1$, либо $n = p$. В первом случае по утверждению 1 имеем $d = 1$, во втором случае имеем $d = f(p)$.

Утверждение 3. Пусть p – простое. Тогда возможно $f(13) = p$.

Доказательство утверждения 3.

Пусть σ – какая-то перестановка простых чисел, меняющая местами 13 и p. Для произвольного натурального n с разложением на простые множители $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ положим $f(n) = \sigma(p_1)^{a_1} \ldots \sigma(p_k)^{a_k}$. Легко видеть, что оба условия сюръективности и $m \mid n \iff f(m) \mid f(n)$ верны для построенной функции f.

Утверждения 2 и 3 дают нам ответ.

6. Существует ли такая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $f(f(n)) = 2n$ для всех $n \in \mathbb{N}$?

Ответ: да, существует.

Решение. Возьмём произвольное натуральное n. Его можно единственным образом представить в виде $n = m \cdot 2^k$, где m – нечётное, k – целое неотрицательное. Если m сравнимо с 1 по модулю 4, то положим $f(n) = (m + 2) \cdot 2^k$. Если же m сравнимо с 3 по модулю 4, то положим $f(n) = (m - 2) \cdot 2^{k+1}$.

Видим, что такая функция подходит.

Замечание. Вообще это довольно полезная идея – разбивать натуральные числа на группы в зависимости от «нечётной части», т.е. числа m в представлении $n = m \cdot 2^k$.

Замечание. В этом решении остатки по модулю 4 особой роли не играют: мы могли произвольным образом разбить нечётные числа на упорядоченные пары и аналогичным образом определить $f(n)$. Для упорядоченной пары (a, b) нечётных чисел схема действия f выглядит так:

$$a \to b \to 2a \to 2b \to 4a \to 4b \to \ldots \to 2^k a \to 2^k b \to 2^{k+1} a \to 2^{k+1} b \to \ldots$$